УДК 314.4 DOI: 10.14451/1.251.128

Характеристики аналитических законов смертности

© 2025 **Леонова Ольга Васильевна**
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов и цифровых технологий. Байкальский государственный университет. Россия, Иркутск.
E-mail: olga.olgaleonova@yandex.ru

Ключевые слова: аналитические законы смертности, таблицы смертности, вероятностные характеристики, числовые характеристики, интенсивность смертности, функция выживания, кривая смертей.

Аналитические законы смертности — это математические модели, описывающие зависимость интенсивности смертности от возраста. Они используются в демографических исследованиях, актуарных расчетах и страховании для прогнозирования продолжительности жизни, расчета страховых тарифов и пенсионных накоплений. Аналитические законы смертности — это не просто математические абстракции, а инструменты для принятия решений в экономике, политике и науке. Их характеристики помогают понять, как меняется продолжительность жизни, и подготовиться к будущим демографическим вызовам. Характеристики аналитических законов смертности играют ключевую роль в демографии, актуарной науке, страховании, пенсионном планировании и биологии старения. Они позволяют формализовать закономерности изменения смертности с возрастом и использовать их для решения практических задач. В данной статье рассматриваются некоторые классические аналитические законы смертности, которые актуальны при исследовании современных данных таблиц смертности. Для этих законов определяются вероятностные и числовые характеристики, дается их интерпретация и обсуждается содержательный смысл.

Введение

Аналитические законы являются эффективными инструментами в исследовательской и практической деятельности благодаря тому, что обладают несколькими ключевыми характеристиками:

1. Объективность — поскольку эти законы основаны на фактических данных или наблюдениях, а не на субъективных мнениях.
2. Универсальность — они применимы в различных условиях и ситуациях, охватывают широкий спектр процессов и явлений.
3. Возможность прогнозирования — аналитические законы позволяют предсказывать результаты и последствия на основе имеющихся данных.
4. Логичность — они построены на основании логических выводов и строгих рассуждений.
5. Измеримость — законы включают количественные показатели, которые можно измерить, зафиксировать и проанализировать.
6. Системность — они рассматривают явления в контексте системы, учитывая все взаимосвязи между элементами.

Кроме этого, аналитические законы имеют вероятностные и числовые характеристики. Вероятностные характеристики позволяют определять вероятности любых событий в определенные моменты времени. Числовые характеристики — это некоторые константы, которые несут в себе дополнительную информацию об изучаемой случайной величине. В работе [4] были рассмотрены и проанализированы аналитические законы смертности, в результате исследования было установлено, что некоторые из них и сейчас достаточно хорошо аппроксимируют данные таблиц смертности [9].

С целью дальнейшей проработки аналитических законов смертности найдем и проанализируем вероятностные и числовые характеристики этих моделей, дадим им содержательную оценку и смысловую интерпретацию.

Закон Муавра

В модели Муавра продолжительность жизни Xрассматривается как случайная величина, распределенная по равномерному закону с параметром w, где w– это предельный возраст. В таблицах смертности [9] предельный возраст составляет 110 лет. Таким образом, для данной модели $\widehat{w} = 110$, функция смертности $f(x) = \frac{1}{110}$, функция распределения $F(x) = \frac{x}{110}$, функция выживания $S(x) = 1 - \frac{x}{110}$, интенсивность смертности $\mu_x = \frac{1}{w-110}$, эти функции будут вероятностными характеристиками модели Муавра. Функция смертности показывает, что человек в любом возрасте умрет с одной и той же вероятностью, равной 0,009. Функция выживания показывает вероятность того, что человек доживет до возраста x лет. Интенсивность смертности показывает вероятность смерти человека возраста x лет в течение ближайшего года.

На рисунках 1 и 2 представлены графики зависимости смертности и выживания от возраста для равномерного закона.

Найдем основные числовые характеристики продолжительности жизни (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану). Используя специальные формулы равномерного закона [3], определим среднюю продолжительность жизни $MX = \frac{110}{2} = 55$ лет, дисперсию продолжительности жизни $DX = \frac{110^2}{12} = 1008{,}3$, среднее квадратическое отклонение $\sigma X = 31{,}8$ лет. Моду определить невозможно, поскольку функция смертности не имеет максимума на области определения, медиану найдем из уравнения $F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{110} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{med} = 55$ лет, это означает, что половина населения умрет в возрасте до 55 лет, другая после. Но как уже отмечалось в [4], модель Муавра не подходит для описания продолжительности жизни на больших промежутках времени, для маленьких промежутков ее вполне можно использовать после определенной корректировки параметров.

Закон Гомпертца

В модели Гомпертца интенсивность смертности описывается с помощью стандартной экспоненциальной функции с параметрами $\alpha > 0$ и $\beta > 0$: $\mu_x = \beta e^{\alpha x}$, функция выживания $S(x) = e^{-\beta \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}}$, функция смертности $f(x) = \beta e^{\alpha x - \frac{\beta(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}$, функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\beta \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}}$. В работе [4] в результате аппроксимации данных таблиц смертности были найдены точечные оценки параметров $\widehat{\beta} = 0{,}0006$, $\widehat{\alpha} = 0{,}065$. С учетом этих оценок модель Гомпертца, которая хорошо описывает современные данные, будет иметь вид: $\mu_x = 0{,}0006e^{0{,}065x}$, $S(x) = e^{-0{,}0006\frac{e^{0{,}065x}-1}{0{,}065}}$, $f(x) = 0{,}0006e^{0{,}065x - \frac{0{,}0006(e^{0{,}065x}-1)}{0{,}065}}$. Функция смертности показывает вероятность умереть в возрасте x лет. Функция выживания показывает вероятность того, что человек доживет до возраста x лет. Интенсивность смертности показывает вероятность смерти человека возраста x лет в течение ближайшего года.

На рисунках 3 и 4 представлены графики зависимости смертности и выживания от возраста для закона Гомпертца.

Найдем вероятностные и числовые характеристики модели Гомпертца. С помощью функции смертоносности можно определить моду, для

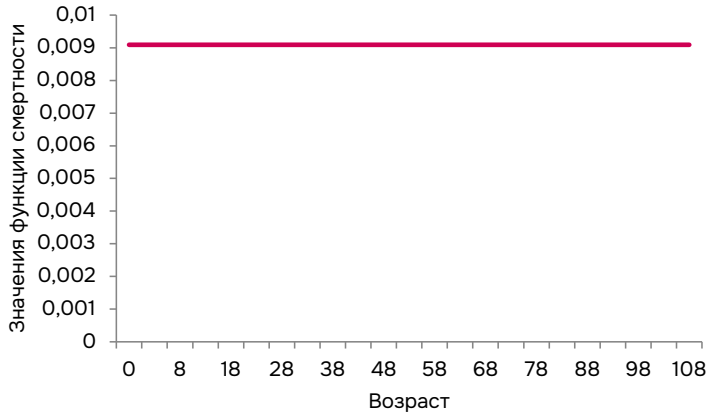

Рис. 1. График функции смертности равномерного закона.

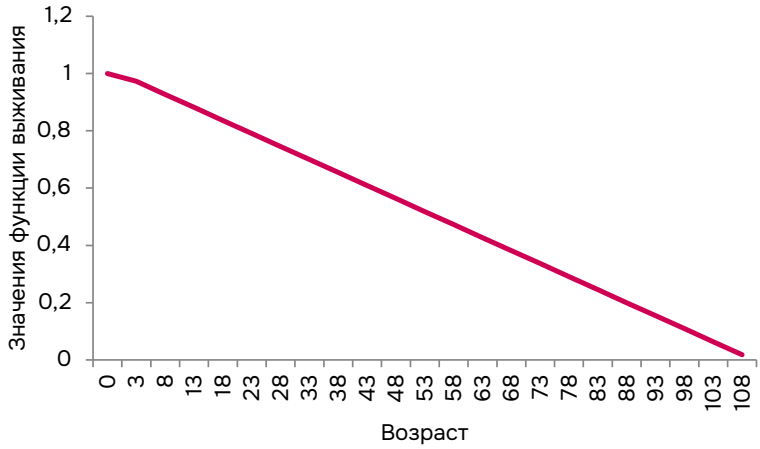

Рис. 2. График функции выживания равномерного закона.

этого найдем производную этой функции:

$$f'(x) = 0{,}0006e^{0{,}065x - \frac{0{,}0006(e^{0{,}065x}-1)}{0{,}065}}$$
$$\left(0{,}065 - 0{,}0006e^{0{,}065x}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(0{,}065 - 0{,}0006e^{0{,}065x}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{0{,}065}{0{,}0006}\right)}{0{,}065} = 72{,}1 \text{ года},$$

это означает, что большинство людей из выбранной совокупности умирают в этом возрасте.

Используя функцию распределения, можно найти вероятность продолжительности жизни человека в любом диапазоне. Например, вероятность того, что продолжительность жизни будет меньше 70 лет можно определить как разность значений функции распределения в соответствующих точках:

$$P\{0 < X < 70\} = F(70) - F(0) =$$
$$\left(1 - e^{-\frac{0{,}0006}{0{,}065}\left(e^{0{,}065\cdot 70}-1\right)}\right) -$$
$$- \left(1 - e^{-\frac{0{,}0006}{0{,}065}\left(e^{0{,}065\cdot 0}-1\right)}\right) = 0{,}57.$$

Также с помощью функции распределения можно определить медиану продолжительности жизни, для этого необходимо решить уравнение:

$$F(x_{med}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{0{,}0006}{0{,}065}\left(e^{0{,}065\cdot x_{med}-1}\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$x_{med} = 66{,}6 \text{ лет}.$$

Это означает, что половина людей из выбранной совокупности проживет больше этого возраста, другая — меньше.

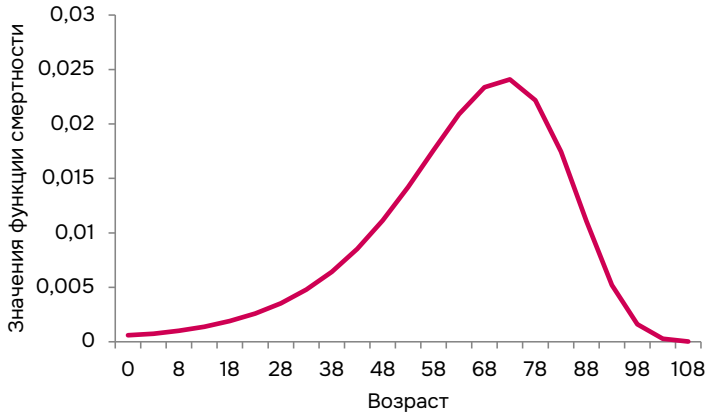

Рис. 3. График функции смертности модели Гомпертца.

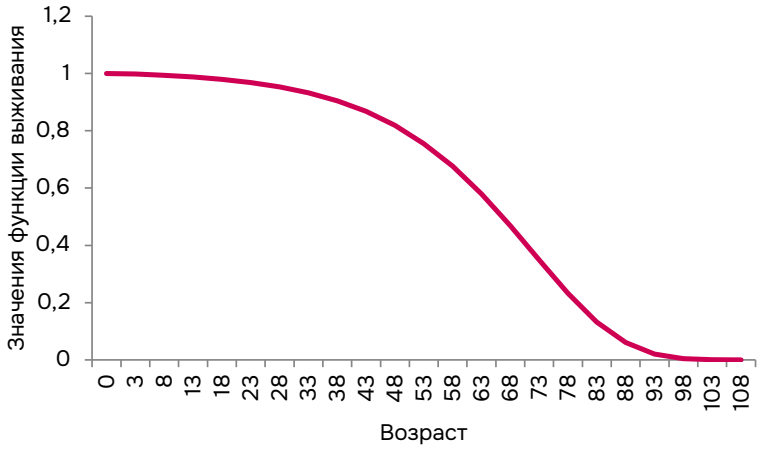

Рис. 4. График функции выживания модели Гомпертца.

Закон Мэйкхама

В работе [4] было установлено, что модель Мэйкхама с оцененными параметрами лучше всего аппроксимирует современные статистические данные по смертности населения. Модель Мэйкхама обобщает модель Гомпертца, поскольку функция интенсивности смертности содержит свободную константу, которая учитывает влияние на смертность человека всех других факторов, кроме его возраста.

В модели Мэйкхама интенсивность смертности описывается функцией $\mu_x = A + \beta e^{\alpha x}$, функция смертности имеет вид: $f(x) = (A + \beta e^{\alpha x})\, e^{-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}$, функция выживания имеет вид: $S(x) = e^{-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}$, функция распределения $F(x) = 1 - e^{-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}}$.

С учетом найденных оценок: $\widehat{A} = 0{,}0005$, $\widehat{\beta} = 0{,}0005$, $\widehat{\alpha} = 0{,}065$, современная модель Мэйкхама будет описываться функциями:

- интенсивность смертности $\mu_x = 0{,}0005 + 0{,}0005e^{0{,}065x}$,
- кривая смертей $f(x) = \left(0{,}0005 + 0{,}0005e^{0{,}065x}\right) \cdot$ $\cdot e^{-0{,}0005x - \frac{0{,}0005(e^{0{,}065x}-1)}{0{,}065}}$,
- функция выживания: $S(x) = e^{-0{,}0005x - \frac{0{,}0005(e^{0{,}065x}-1)}{0{,}065}}$,
- функция распределения: $F(x) = 1 - e^{-0{,}0005x - \frac{0{,}0005(e^{0{,}065x}-1)}{0{,}065}}$.

Функция смертности показывает вероятность того, что умрет человек возраста x лет. Функция выживания показывает вероятность дожить до возраста x лет. Интенсивность смертности показывает вероятность смерти x летнего человека в течение ближайшего года.

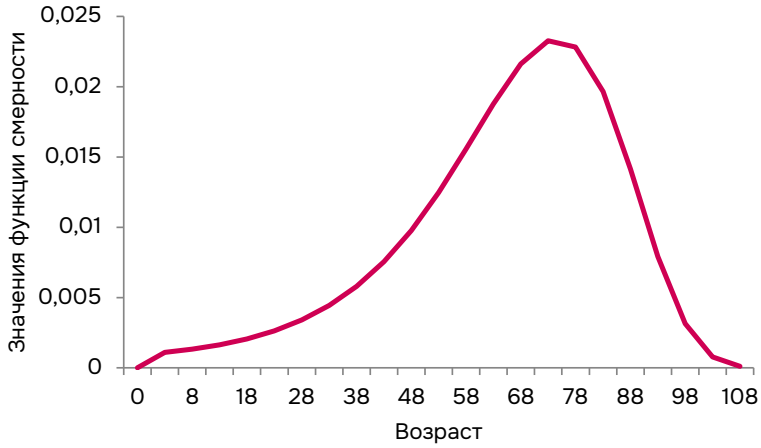

Рис. 5. График функции смертности модели Мэйкхама.

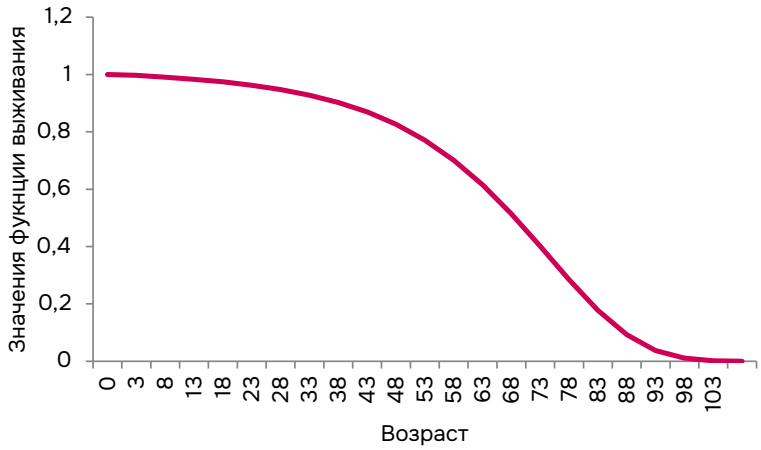

Рис. 6. График функции выживания модели Мэйкхама.

На рисунках 5 и 6 представлены графики зависимости смертности и выживания от возраста и других факторов закона Мэйкхама.

Найдем вероятностные и числовые характеристики модели Мэйкхама. С помощью функции смертоносности можно определить моду, для этого найдем производную этой функции:

$$f'(x) = e^{-0{,}0005x - \frac{0{,}0006(e^{0{,}065x}-1)}{0{,}065}}(0{,}065\cdot$$
$$\cdot 0{,}0005e^{0{,}065x} - (0{,}0005 + 0{,}0005e^{0{,}065x})^2) = 0 \Rightarrow$$
$$e^{0{,}065x} = 127,992 \Rightarrow x = \frac{\ln(127,992)}{0{,}065} =$$
$$= 74,65 \text{ лет},$$

это означает, что большинство людей из выбранной совокупности умирают в возрасте 74,65 лет.

Вероятность того, что продолжительность жизни будет меньше 80 лет в модели Мэйкхама:

$$P\{0 < X < 80\} = F(80) - F(0) =$$
$$= \left(1 - e^{-0{,}0005\cdot 80 - \frac{0{,}0005(e^{0{,}065\cdot 80}-1)}{0{,}065}}\right) -$$
$$- \left(1 - e^{-0{,}0005\cdot 0 - \frac{0{,}0005(e^{0{,}065\cdot 0}-1)}{0{,}065}}\right) = 0{,}76.$$

Также с помощью функции распределения можно определить медиану продолжительности жизни, для этого необходимо решить уравнение:

$$F(x_{med}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-0{,}0005x_{med} - \frac{0{,}0005(e^{0{,}065x_{med}-1})}{0{,}065}} =$$
$$\frac{1}{2} \Rightarrow x_{med} = 68,65 \text{ лет}.$$

Это означает, что половина людей из выбранной совокупности проживет больше этого возраста, другая — меньше.

Модели Вейбулла и Эрганга тоже относятся к классическим аналитическим законам смертности, но в работе [4] они показали плохое качество, поэтому нет особого смысла демонстрировать на них вычисления вероятностных и числовых характеристик продолжительности всей жизни человека, поскольку только пригодные и адекватные модели стоит использовать для анализа и прогноза. Вполне возможно, что законы Вейбулла и Эрланга можно использовать для каких-то конкретных возрастных промежутков, тогда вероятностные и числовые характеристики для них можно определять, используя приемы, описанные в моделях Гомпертца или Мэйкхама.

Моделирование процессов и явлений — это мощный инструмент познания и прогнозирования, который применяется в науке, технике, экономике и многих других областях [5; 7; 8]. Моделирование экономит время, деньги и ресурсы, позволяя исследовать, предсказывать и оптимизировать процессы до их реализации в реальном мире. Без него современная наука и технологии развивались бы гораздо медленнее [1; 2; 6].

Заключение

Аналитические законы смертности необходимо строить, поскольку они помогают понять и предсказать тенденции смертности населения определённой возрастной группы, что важно при планировании и разработке национальных программ здравоохранения, а также методик профилактической работы с населением и оценки рисков. Оценки рисков широко используются в страховании, финансах, медицине, управлении проектами, безопасности труда и экологической деятельности для принятия решений в условиях неопределенности и минимизации потенциальных потерь.

Аналитические законы смертности также можно использовать для оценки ожидаемой продолжительности жизни, разработки страховых тарифов, планирования системы здравоохранения, анализа демографических тенденций и оценки рисков в различных сферах жизни.

Вероятностные и числовые характеристики аналитических законов смертности очень полезны, поскольку отражают вероятность смерти или продолжительности жизни в определенные промежутки времени и распределение смертности по возрастам. Они помогают оценить риски, определить ожидаемую продолжительность жизни и анализировать структуру смертности населения. Они могут быть полезны демографам, страховым компаниям при проведении актуарных расчетов, государственным органам для анализа структуры населения, оценки рисков и планирования социальных программ.

Библиографический список

1. *Агеева Е. В.*, *Бахматов С. А.*, *Сорокина Т. В.* К вопросу о расширении круга застрахованных лиц социальным страхованием от профессиональных рисков // Baikal Research Journal. — 2022. — Т. 13, № 3. — DOI: 10.17150/2411-6262.2022.13(3).5. — EDN DKXREE.
2. *Аксенюшкина Е. В.* Нахождение оптимальной инвестиционной стратегии финансовой организации // Baikal Research Journal. — 2017. — Т. 8, № 4. — DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(4).16.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей : учебное пособие. — Лань, 2018. — С. 44—8. — ISBN 978-5-8114-3098-0.
4. *Леонова О. В.* Аналитические законы смертности // Экономические науки. — 2025. — 5 (246).
5. *Леонова О. В.* Моделирование и прогнозирование налоговых поступлений в Консолидированный бюджет субъектов Российской Федерации // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2021. — № 3. — С. 62—72.
6. *Малютина С. А.*, *Степанова Е. Л.*, *Белякова Е. А.* Анализ основных показателей внешней торговли Иркутской области // Baikal Research Journal. — 2025. — Т. 16, № 1. — С. 301—313. — DOI: 10.17150/2411-6262.2025.16(1).301-313. — EDN SHXQAL.
7. *Мамонова Н. В.* Исследование рынка недвижимости в городе Шелехове // Baikal Research

Journal. — 2017. — Т. 8, № 1. — DOI: 10.17150/2411-6262.2017.8(1).14.

8. *Суходолов А. П., Кузнецова И. А., Тимофеев С. В.* Анализ подходов в моделировании средств массовой информации // Вопросы теории и практики журналистики. — 2017. — Т. 6, № 3. — С. 287—305. — DOI: 10.17150/2308-6203.2017.6(3).287-305.
9. Таблица смертности населения России для календарного года 2008 / Демоскоп Weekly. — URL: http://www.demoscope.ru/weekly/ssp/rus_lt.php?year=50.