

УДК 33 DOI: 10.14451/1.239.273

# Топологический метод анализа финансовых временных рядов и обеспечения безопасности финансовых данных

© 2024 **Ключников Игорь Константинович**

Доктор экономических наук, профессор. Международный банковский институт имени Анатолия Собчака, Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: igorkl@list.ru

© 2024 **Ключникова Анна Игоревна**

Аспирант. Международный банковский институт имени Анатолия Собчака, Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: klyuchnikova.ai@phystech.edu

**Ключевые слова:** топологический анализ данных, финансовые временные ряды, финансовые рынки, финансовая безопасность, финансовая перформативность.

**Цель статьи:** определить перспективы использования топологических методов анализа финансовых данных.

В последнее время в финансовую сферу внедряются новые методы работы с временными рядами. В его основе анализ топологических данных. Такой подход открывает возможность изучать непрерывность и связность объектов и пространств, используя форму данных для определения их содержания. Топологический анализ данных (ТАД) позволяет проводить количественную оценку формы и структуры данных и, тем самым, выявлять закономерности в наборах данных и рыночном поведении. ТАД открывает новые перспективы для работы с финансовыми временными рядами. В частности, данный метод позволяет переходить к анализу масштабных наборов данных, обнаруживать ранние сигналы, свидетельствующие о критических переходах в финансовых временных рядах, и поддерживать надежность сгенерированных данных. Топологический анализ зашумленных, неструктурированных и неполных данных позволяет выявлять тенденции, которые определяют направление поведения рынка и движение цен. В статье используется междисциплинарный подход, который позволяет привлечь технологии различных разделов математики (алгебраической топологии, метрической геометрии, теории представлений и комбинаторики) и соединить их с требованиями финансовой теории и статистики.

**Результаты:** раскрыты и показаны перспективы топологического анализа данных в финансовой сфере, продемонстрирована их роль для анализа безопасности финансовых данных.

## Введение

За последние десять лет произошел огромный подъем в области вычислительной топологии анализа данных (ТАД). В основе ТАД находится набор концепций и методов алгебраической и дифференциальной топологии. До недавнего времени данная сфера относилась к области чистой математики. Однако в прошлом десятилетии топологические методы получили быстрое распространение в других областях — от биологии и медицины до экологии и финансов. Переход к топологической работе с данными позволяет использовать набор новых аналитических инструментов. С их помощью проводится количественная оценка формы и структуры данных, что позволяет искать определенные закономерности.

В настоящее время наблюдается рост интереса к данному методу со стороны финансовой науки [26]. Дело в том, что ТАД демонстрирует свою полезность при анализе финансовых временных рядов. В частности, с помощью данного метода возникла возможность существенно повысить эффективность анализа, расширить наборы данных, включить в них зашумленные, неполные и неструктурированные данные и использовать их в вычислительных процедурах для анализа текущего и прогнозирования будущего состояния рынка, цен и поведения участников. При этом происходит переход от преимущественно статического к динамическому анализу данных.

Достаточно быстро ТАД-метод доказал свою эффективность в поддержке и совершенствовании машинного обучения (МО), а также стал его дополнять. Широко используется данный метод в ряде финансовых приложений (например, при работе с клиентами в социальных сетях, портфельном управлении и биржевой торговле). Кроме того, МО подключается непосредственно в сам метод как технология его реализации [13]. Технологии больших данных (БД) и искусственный интеллект (ИИ) позволяют существенно расширить масштабы анализа и использования топологического метода в финансовых приложениях [1].

В настоящее время зарождается новое направление использования ТАД-методов в финансах. Оно связано с возможностью данной технологии поддерживать безопасность и надежность систем ИИ в финансовых приложениях и в моделях искусственных финансовых рынков. Для этого вводятся новые теоретические конструкции и вычислительные инструменты (например, так называемая технология топологического параллакса [24]), которые позволяют проводить сравнения обученной модели с эталонным набором данных. Посредством сравнений определяется наличие у обученной модели схожей с эталоном многомасштабной геометрической структуры, что повышает надежность работы финансовых приложений.

Переход на топологические методы анализа финансовых временных рядов и включение ТАД-моделей в системы высокочастотной биржевой торговли и портфельного управления, а также финансовые приложения в социальных сетях происходит в рамках общего развития финансовой перформативности [2]. Новые подходы к анализу данных и использование ТАД-методов для торговых и управленческих процессов и обслуживания клиентов свидетельствуют о переходе финансовых исследований и практического использования полученных результатов на новый уровень.

ТАД-метод позволяет извлекать и изучать необходимую информацию из наборов многомерных, неполных и зашумленных данных какими являются финансовые рынки. При конечном наборе зашумленных финансовых данных  $S \subseteq Y$  в неизвестной части рынка  $X$ , топологический анализ данных позволяет восстанавливать и определять топологию  $X$ , предполагая, что  $X$  так же, как и  $Y$  являются топологическими пространствами финансового рынка. Тем самым появляется возможность при неполной информации и неизвестной структуре рынка проводить анализ данных.

Финансовый рынок представляет собой большие сети данных. Сетевая топология позволяет распознавать узлы и их соединения в сети,

привлекая для этого физические и логические аналитические инструменты. Узлы представляют собой скопление данных близкого значения, они свидетельствуют об интенсивности и важности соответствующей информации. В общем плане физическая топология позволяет определять расположение узлов, а логическая топология описывает их соединение и способ передачи данных в сети. Анализ финансового рынка с позиции физической топологии уточняет назначение структурных образований на финансовых рынках, проводит кластеризацию данных и участников и раскрывает их рыночное распределение. Логическая же топология позволяет выяснять работу сетей и поведение рыночных участников.

В математике топологическое пространство представляет собой геометрическое пространство с определенной близостью элементов. Обычно такое пространство относят к евклидовому пространству с измеримыми множествами и элементами, что открывает широкие перспективы для развития вычислительных процедур. Использование таких возможностей позволяет проводить анализ финансового рынка с новых позиций. При этом чрезвычайно сложная система, которой является финансовый рынок, упрощается и сводится к достаточно обозримой геометрической структуре и простым дифференциальным уравнениям, с помощью которых описывается микро-поведение выбранного расположения данных.

В топологическом анализе низкоразмерные представления получают структуры более высоких размерностей. Такие возможности нашли применение в финансовых исследованиях, поскольку они позволяют посредством микроуровневого анализа данных переходить к макроэкономическим обобщениям.

*Цель анализа* финансовых топологических данных: понять форму финансового временного ряда без заранее предложенной его модели.

*Частные задачи.* С помощью топологических методов можно также выделять тенденции, ко-

торые находятся за рамками нормальных распределений и относятся к хвостовым частям распределений, что позволяет определять переходы рынка из одного состояния в другое; обеспечивать безопасность и надежность смоделированных данных посредством сравнений смоделированного набора данных с эталонным образцом.

*Главная идея* метода – создание искусственных рядов и/или облаков данных, которые более полно отражают движение финансового рынка. Данный подход необходим для анализа зашумленных и неструктурированных данных, а также временных рядов с неполным набором данных.

*Механизм* метода сравнения и корректировки в ходе оптимизации двух топологических пространств позволяет создать искусственные финансовые временные ряды, более полно отражающие реальный финансовый рынок.

*Концепция:* реальные данные → форма → содержание → ценность → искусственные временные ряды.

Общими проблемами для масштабного внедрения новых методов анализа финансовых временных рядов является недостаточное теоретическое обоснование, а также отсутствие обзоров их применения в финансовой сфере и отсутствие широких эмпирических исследований, которые демонстрируют их эффективность. Цель этой статьи двояка. Во-первых, предоставить краткое введение в топологические методы анализа данных, которые уже используются в финансовых приложениях, а также показать некоторые новые возможные направления их применения для обработки финансовых временных рядов. Во-вторых, продемонстрировать некоторые способы применения в финансовом анализе основных концепций и инструментов ТАД и, тем самым, показать перформативное значение метода.

**Литература и состояние развития проблемы**

Обзор литературы и основных исследовательских направлений разделен на три раздела:

во-первых, прослеживается историческая перспектива анализа топологии данных; во-вторых, оцениваются недавние исследования по этому вопросу с акцентом на финансовый рынок; и, в-третьих, подробно рассматриваются перспективы развития метода для анализа финансовых временных рядов.

В последние годы получает развитие новые методы анализа финансовых временных рядов и обработки сигналов финансовых рынков. Среди них особенно выделяются топологические методы анализа временных рядов [3; 18; 25; 27]. Они открывают возможность изучать непрерывность и связность объектов и пространств, используя форму данных для определения их содержания, что открывает новые перспективы для изучения и понимания финансового рынка.

В целом ряде исследований подробно раскрываются назначение, перспективы и возможности топологического анализа [11; 17]. Тем не менее, чрезвычайно редко встречаются статьи, в которых анализируется применение данного метода для анализа финансовых рынков. В текущем десятилетии появились статьи, в которых рассматриваются отдельные аспекты применения топологического анализа для изучения природы и масштабов распространения финансовых кризисных процессов [26], изучения фондовых бирж [9], оптимизации и решения вопросов безопасности инвестиционных портфелей [21], кластеризации данных [20].

Настоящее исследование опирается на целый ряд работ в области топологического анализа данных. В обстоятельном исследовании показано, что в сфере топологического анализа данных геометрия, топология и алгоритмы образуют мощную смесь дисциплин, которые начинают широко использоваться как в научных исследованиях, так и в хозяйственной практике [22]. Важной проблемой анализа топологического метода является его классификация [3]. Имеются статьи, в которых рассматриваются топологические методы анализа больших данных, включая с позиции кибербезопасности [19].

В последнее время получают развитие различные вычислительные методы топологического анализа данных. В частности, анализируются перспективы квантовых алгоритмов топологического анализа данных, что позволяет значительно ускорить вычислительные процедуры. Предлагаются пошаговые инструкции для применения квантового алгоритма в МО [15].

Другим перспективным направлением становится привлечение машинного обучения к топологическому анализу данных [23]. Развитие топологического МО обусловлено усовершенствованием вычислительных методов. С помощью новых технологий расчет топологических характеристик становится более эффективным, что позволяет переходить к более сложным и большим наборам данных, а также масштабированию финансовых приложений в интернете [14].

#### **Основные подходы**

Переход к использованию ТАД-метода можно отнести к своеобразному вычислительному прорыву в области изучения финансовых временных рядов. Он позволяет извлекать идеи из неструктурированных данных, получать необходимую информацию из зашумленных и сложных наборов данных и понимать высокоразмерные данные без потери информации путем своеобразного упрощения сложности. В последнее время ТАД-метод дополнен подходами, которые позволяют строить искусственные временные ряды при неполных данных и приводить к единой системе координат ранее несовместимые данные с разными временно-пространственными измерениями.

В силу роста неопределенности рынков усиливается необходимость в новых подходах к их анализу. Задача сводится к извлечению существенных особенностей финансовых временных рядов. Для этого устанавливается зависимость между топологией сети и ее функцией. Таким образом, решаются различные задачи, включая оптимизацию инвестиционного портфеля [21].

На первом этапе классифицируют волатильность временных рядов. На этой основе прово-

дится их кластеризация и извлечение структуры аттрактора, определяющего переходные правила временных рядов. В результате устанавливаются закономерности переходных процессов [25]. Данная способность ТАД позволяет проводить раннее обнаружение смены биржевых трендов и обнаруживать предвестников кризисных процессов.

В ходе последующего топологического анализа проводится проверка данных на непрерывность, сходимую и связанность [6], а также значимость, расстояние и устойчивость [5]. Такой анализ позволяет выявлять процессы, которые способны нормализовать кризисные тренды.

Непрерывность относится к центральной концепции топологии. Дело в том, что топологическое пространство имеет минимальную структуру, необходимую для его непрерывности. Непрерывность отображения реальности означает отсутствие резких изменений (включая разрывов) в значении функции, отражающей развитие последовательности данных.

При неполных данных в ходе топологического анализа восстанавливается их набор. Технологии БД предоставляют широкие возможности для таких процедур. Например, семейство генеративных моделей обладает возможностью восстанавливать данные путем генерирования искусственных данных, соответствующих реальным финансовым процессам [23].

Сходимость сводится к проблеме поиска консенсуса данных. Область топологического анализа касается извлечения топологических вариантов из базы данных. В настоящее время существует две основные методологии представления многообразий из наборов данных [7]. Одна использует графы с взвешенными ребрами, при этом их проверяют на сходимость с учетом весов. Второй подход создает серию невзвешенных графов, которые восстанавливают топологию по одному масштабу. Большое преимущество невзвешенного графа – то, что связь между графом и топологическим пространством (объединение множеств) является непосредственной.

Связанность относится к подмножеству пространства, для которого отсутствуют условия для разъединения. Как правило, каждое подмножество разъединено от другого подмножества. Проблемы связности непосредственно относятся к непрерывному обратимому преобразованию пространства. По сути, финансовый рынок и его отражение в наборе данных как раз и является таким гомеоморфным пространством.

Расстояние может потенциально варьироваться в зависимости от режима передачи данных. Понятие расстояния неразрывно связано с характером данных. При этом под расстоянием подразумевается не расстояние между агентами, а расстояние между данными. Расстояние означает некоторую меру близости между точками данных в пространстве. В целом, через понятие расстояния отражается наличие сходства (и его степень) между данными.

Примером анализа связанности и определения расстояния между данными при топологическом анализе могут служить банковские сети, у которых четко выделяются банки-узлы с множеством связей и близкими расстояниями. Данные банки являются ведущими в банковской сфере. Они определяют поведение банковской системы. Топологический анализ позволяет выделить такие банки и определить их весовое значение в системе.

Устойчивость является сложной концепцией, поскольку она имеет много аспектов. Статистическая устойчивость проявляется в стабильности. В математике стабильность представляет собой устойчивость к небольшим деформациям на входе и после воздействия возвращения в прежнее состояние.

Для статистиков и специалистов по данным стабильность сводится к надежности вывода. Так, результат статистического теста или вывода при колебаниях исходных данных в силу случайного шума или любого отклонения, сохраняется и является репрезентативным. Статистик может рассмотреть возмущение с точки зрения изменения распределения данных. Например, в хвостовых

частях распределения данных можно наблюдать множества неожиданных отклонений, ведущих к нарушению стабильности. Также в них может находиться источник перестройки рыночного поведения, поэтому топологический анализ хвостовых распределений позволяет выявить новые тенденции.

Основным инструментом метода является постоянная гомология, включающая три основных уровня, каждый из которых опирается на особую отрасль математики.

*Первый уровень.* Метрическая геометрия. Построение возрастающего семейства  $X_t$  ячеек комплексов вокруг входного набора данных  $X$ , где индексация  $t$  является параметром масштаба в  $\mathbb{R} \geq 0$ . Геометрия придает конкретную форму топологическим структурам.

*Второй уровень.* Алгебраическая топология. Вычисление  $d$ -гомологического векторного пространства  $H_d(X_t)$  для масштабов  $t$  в  $\mathbb{R} \geq 0$  и размеров  $d$  в  $\mathbb{Z} \geq 0$ .

*Третий уровень.* Теория представления раскладывает каждое семейство векторных пространств  $\{H_d(X_t) \mid t \geq 0\}$  на определенные топологические группы и превращает их в новые топологические группы  $G \rightarrow H$ , что позволяет создавать штрих-код, который определяет направление их движения. Векторизация позволяет проводить кодирование информации, поэтому топологию условно определяют как метод кодирования общей формы данных.

Различные алгоритмические решения, которые предлагаются на трех основных уровнях топологического анализа, предоставляют средства для построения геометрических структур на уровне сложности, которая не превышает порог, необходимый для восприятия человеком и необходима для практических приложений.

Полученные штрих-коды представляют собой конечные мультимножества реальных интервалов  $[p, q] \subset \mathbb{R}$ , которые допускают различные геометрические интерпретации. Конечной целью разработки штрих-кодов является форми-

рование вывода о геометрии  $X$  в различных масштабах, то есть возможности различной направленности временных рядов в будущем (при различной длине интервала штрих-кода). Таким образом, по штрих-кодам можно разрабатывать возможные сценарии развития рынка.

При этом после построения  $\{X_\varepsilon\}$  из  $X$  (в ходе постоянных корректировок и исправлений) вся последовательность гомологии перестает быть контролируемой. В таком случае для получения новых штрих-кодов из  $X$  не требуются ни помеченные данные, ни настройка гиперпараметров. На практике это означает возможность работы с неполными и неструктурированными данными и искусственным заполнением недостающих данных, что особенно важно для повышения правдоподобия искусственных финансовых рынков.

Штрих-коды по своей сути являются комбинаторными объектами, то есть представляют собой связанные по определенным правилам элементы финансового множества, поэтому их достаточно просто векторизовать [27].

Финансовый рынок можно представить в виде топологической сети данных, которые группируются в определенные точки данных в виде узлов, соединенных соответствующими ребрами. Поскольку каждый узел представлен несколькими точками данных, их сеть является сжатой версией высокоразмерных данных, которая отражает финансовые потоки рынка.

ТАД-метод открывает принципиально новый взгляд на наборы данных. Он позволяет захватывать многомасштабные с различной структурой наборы данных и изучать их свойства. Кроме того, топологический анализ открывает перспективы для расширения масштабов анализа и перехода к изучению не только непосредственно финансовых, но и контекстных наборов данных.

Привлечение комбинаторики к топологическому анализу позволяет более четко проводить причинно-следственные связи и устанавливать границы каждого элемента и улавливать пе-

реход в новое состояние. И еще одна важная причина широкого применения комбинаторики в топологическом анализе. Интуитивная комбинаторика позволяет преодолеть формализм, которым изобилует топологический метод анализа данных. С её помощью раскрываются основные идеи простыми средствами, включая графические изображения, с помощью которых возможна минимизация необходимого количества деталей.

В одном и том же наборе данных можно найти много различных топологических особенностей. Тем самым ТАД-метод достаточно универсален. Исследователь, исходя из поставленной задачи, может с его помощью решать разные задачи.

Поскольку топология обычно учитывает локальные свойства пространств, важной особенностью данного метода является возможность проведения микроанализа данных, на основе которого можно анализировать поведение не только всего рынка в целом, но и его составных частей. Тем самым топологический метод позволяет проводить анализ снизу-вверх – с микрофинансового на макрофинансовый уровень.

В рамках топологического анализа можно проводить кластерный анализ данных по типологическим признакам [20]. Задача такого анализа сводится к разделению данных на группы, которые имеют некоторые четкие определяющие свойства или концептуальную согласованность. Кластер может представлять собой отдельный узел, сформированный из сгруппированных данных, или же группу узлов, связанных ребрами. Причем фигура, образованная узлами и ребрами представляют собой один цикл, который демонстрирует определенные свойства и направленность.

ТАД-метод полагается только на меры сходства, поэтому он свободен от недостатков большинства статистических методов, использующих линейные закономерности или алгебраические

модели. Тем не менее, на пути широкого применения данного метода имеются, по меньшей мере, три проблемы:

1. большое количество вариантов векторизации и значительная сложность сравнения их эффективности<sup>1</sup>, а также трудоемкость оценки соответствия конкретным целям анализа,
2. бесконечномерное и нелинейное пространство штрих-кодов затрудняет вложения в конечномерные векторные пространства,
3. недостаточно четкое различие наборов данных, которые структурно схожи, но различаются по деталям и в мелких масштабах.

### **Топологическая система поддержки безопасности финансовых данных**

Переход к цифрации безопасность в финансовой сфере во многом зависит от надежности модели и её соответствия не только реальному финансовому рынку, но и эталонному образцу. Для удостоверения надежности информации наборы данных, полученные в ходе МО, проверяют на соответствие эталонным наборам данных.

Другим направлением решения безопасности данных является переход на поведенческую топологическую аналитику. Данный метод позволяет выявлять манипуляцию данными, ошибки и хакерские атаки. Топологическая методология открывает широкие перспективы для определения аномалий движения данных и поведения пользователей, и её применение повышает кибербезопасность [19].

В работах, связанных с кибербезопасностью финансовых данных важную роль, играет кластеризация данных. Она позволяет группировать данные в кластеры или группы и проводить их идентификацию аналогичным точкам данных в высокомерном пространстве. Тем самым выясняются аномальные изменения.

Топологический анализ безопасности, по сути, сводится к поиску аномалий в движении данных (путем сравнения с эталонным набором дан-

<sup>1</sup>В одном из последних обзоров представлено 13 методов векторизации по пятиосновным направлениям (статистической векторизации, алгебраической векторизации, векторизации кривых, функциональной векторизации и векторизации ансамбля) [4].

ных, полученных из временных рядов). Однако аномалии могут свидетельствовать о появлении новых рыночных тенденций и предстоящей смене поведения. Следовательно, пользоваться предложенным аналитическим инструментом необходимо чрезвычайно осторожно с учетом исследуемых данных и перспективы рыночного развития. В настоящее время рассмотренная область исследования применения ТАД-метода только зарождается.

Надежность финансовой сети во многом зависит от её топологической структуры. Так, физическое расположение элементов сети и связи между ними могут обеспечивать как бесперебойное функционирование, так и стать источником проблем.

Анализ взаимодействия между структурой сети и функцией является важным направлением решения вопросов безопасности портфельного управления. Перекрестные корреляции между различными активами могут быть выявлены методами топологической иерархической кластеризации. Такой подход позволяет повысить надежность портфельного управления.

Функции сложных финансовых сетей, во многом определяемые их структурным построением, отражаются в оценке рисков и оптимизации портфеля [21]. Для повышения надежности достижения заданного уровня доходности внедряется динамическая портфельная стратегия. В её основе кластеризация активов по определенным критериям (доходности – краткосрочной, среднесрочной или долгосрочной, а также надежности). При этом кластеризация может проводиться ТАД-методом [20].

Другим важным направлением топологической оптимизации финансовых временных рядов с целью повышения надежности данных является фильтрация шума. Если количество временных записей значительно превышает количество узлов, уровень статистической неопределенности увеличивается. В таких случаях в матрице перекрестной корреляции доминирует шум. Задача оптимизации сводится к поиску изменчивости

и возможных отклонений динамической системы.

В последнее время в портфельном управлении используют стратегию коллективного управления движения цен. Переход к данной стратегии в сложных финансовых системах возможен через оптимизацию структуры и функции сети, которые генерируются глобальным движением, определяемым средней вариацией теории портфеля Марковица. Данная задача решается с помощью перехода к топологическим методам оптимизации данных процессов.

Под воздействием пандемии и геоэкономических подвижек меняется и усложняется поведение рыночных участников. В связи с этим актуализируются задачи, связанные с поиском изменений и аномалий в движении информации, а также определение условий для надежной работы рынка. ТАД-метод был использован для анализа финансового кризиса 2008 г., а также прогнозирования развития рынка [10]. Таким образом, имеется опыт использования данного метода для изучения общих вопросов безопасного функционирования финансового рынка.

### **Перспективы использования ТАД**

Потенциал ТАД-методов для финансовых исследований и приложений достаточно высокий. Важное значение для перехода к широкомасштабному применению данного метода в финансах имеет создание экосистемного программного обеспечения [8]. Библиотека программного обеспечения топологических методов анализа крайне незначительная [12]. В целом создание экосистемы топологических методов применительно к финансовой сфере может выступать перспективным направлением развития данных методов в отрасли.

Одним из следующих шагов развития ТАД-метода в финансовой сфере может быть переход к исследованию данных в римановом пространстве с позиции пространственно-временной специальной и общей теории относительности. Внимание фокусируется на пространственно-временных и разно-скоростных особенностях



финансовых данных. Дело в том, что глобальный финансовый рынок развивается под воздействием разно-скоростных страноведческих процессов, то есть имеет разнообразные характеристики во времени и пространстве.

Уровень финансового развития и скорость распространение кризисных процессов различаются по странам. Воздействие государства и рынка на ход проникновения финансов в хозяйственную жизнь также имеет свою специфику в каждой стране. Институциональные и политические структуры зависят от местных условий, и их воздействие на финансовый рынок варьируется во времени. Кроме того, культурно-информационные особенности каждой страны также накладывают отпечаток на финансовые процессы, скорость и силу их протекания, поэтому при переходе к исследованию глобального финансового рынка необходим более тщательный анализ с привлечением новых исследовательских методов и инструментов.

Временные отклонения финансовых процессов по странам оказывают существенное воздействие на формирование закономерностей глобального финансового рынка, в частности влияют на возникновение и распространение кризисных явлений. Такие отклонения существенны. Они не вписываются в процессы, которые описывает обычный статистический анализ временных рядов.

Для приведения разно-скоростных финансовых процессов к единой системе координат требуются специальные преобразования, в основе которых, например, могут быть новые методы работы с пространством. Топологические методы анализа могут преобразовывать пространственно-временные координаты событий при переходе от одной системы отсчета к другой. Тем самым акцентируется внимание на страноведческих особенностях развертывания кризисных процессов в ходе кросс-границных переливов финансовых возмущений (внешних шоков). Для этого потребуются синхронизация времени, согласование единиц измерения и раз-

работка правил соответствия модели временных рядов данным финансового рынка. Так, два разнородных финансовых рынка одновременно развиваются со скоростью  $v > 0$  в пространстве  $S$ . В таком случае они будут неодновременными относительно глобального финансового рынка  $S_g$ . Если считать глобальный финансовый рынок эталонным, то каждый национальный финансовый рынок развивается по отношению к нему с инерцией или ускорением. Понятно, что события на двух разных рынках не обязательно являются одновременными.

В таком случае задача сводится к приведению национальных рынков к единой системе координат, для этого используют различные преобразования. Среди них наиболее известным является преобразование Лоренца (линейные преобразования векторного псевдоевклидова пространства). Так, рынки  $S$  и  $S'$  развиваются с разными скоростями. Развитие рыночного участника  $x$  в  $S$  происходит в векторном направлении  $\mathbf{u}$ , что можно записать следующим образом  $|\mathbf{u}| = u = dx/dt$ . В свою очередь в рыночном пространстве  $S'$  развитие участника  $x'$  можно записать следующим образом:  $|\mathbf{u}'| = u' = dx'/dt'$ .

Привести данные формулы к единым координатам можно посредством простых линейных преобразований. В таком случае,  $x'$  и  $t'$  являются простыми линейными комбинациями  $x$  и  $t$ . В результате возможно включение разно-скоростных рынков в единую систему координат.

Наряду с переходом к приложению топологического анализа к риманову пространству важным направлением дальнейших исследований данного метода в финансах является, с одной стороны, его приложение к МО, а с другой стороны, включение МО в топологический анализ данных. Данное направление связано с развитием финансовым приложений, в частности в социальных сетях [16]. Например, топологический анализ данных позволяет повышать эффективность интеллектуальных систем финансовых учреждений, связанных с клиентским обслуживанием.

Новые методы в основном направлены на использование топологических функций в моделях МО для анализа, извлеченных из заданного набора данных. Извлекать необходимую информацию можно посредством векторизации топологических признаков. При этом данный механизм можно встраивать в специальные слои нейронных сетей, которые обрабатывают данные. Таким образом, данный метод можно использовать в различных системах искусственного интеллекта.

### **Заключение**

В статье предложен обзор наиболее стандартных методов в области топологического анализа финансовых данных. Кроме того, представлена презентация основ ТАД по топологическим, алгебраическим, геометрическим и статистическим аспектам и особенностям их применения при анализе финансовых данных.

Топологический метод анализа данных только начинает использоваться в работе с финансовыми временными рядами. Он позволяет анализировать крупномасштабные данные с использованием геометрии и методов алгебраической топологии. Учитывая геометрические и топологические особенности многомерных данных, представляющих собой комбинацию различных метрик, которые отражают разные аспекты эволюции финансового рынка, появляется возможность сохранять и совместно рассматривать сложные отношения внутри данных. Следовательно, топологический метод может привести к лучшим результатам, чем использование стандартных аналитических инструментов.

Для более точного и наглядного определения преимуществ нового метода необходимы значительные эмпирические исследования и сравнения результатов анализа стандартными и новыми аналитическими инструментами. В библиотеке аналитических инструментов имеются алгоритмы топологического анализа, которые можно использовать в тестовом режиме [5].

Преобразование данных в топологические се-

ти позволяет раскрыть ряд новых идей, которые можно использовать для анализа текущего состояния и прогноза развития финансового рынка. Кроме того, данный метод отрывает возможности выделять скрытые закономерности, а также проводить кластеризацию по определенным свойствам. Такой подход позволяет перейти к поиску и выделению тенденций (определенных кластеров), которые неявны, но могут влиять на будущее развитие рынка.

Многообещающим является сочетание топологического анализа данных с машинным обучением. Тем самым можно перейти к созданию интеллектуальных искусственных топологических сетей. В результате открывается перспектива раскрытия статистически значимых закономерностей на финансовых рынках. Кроме того, такой подход позволит в высокочастотной биржевой торговле, во-первых, варьировать временным горизонтом, во-вторых, расширять пространственный спектр активности (подключать в систему данные других рынков), в-третьих, перейти к перекрестным сделкам, носящим, по сути, обменный и/или арбитражный характер. Отдельно можно выделить перформативную значимость ТАД-метода как для познания финансового рынка, так и возможности воздействия на его развитие.

В то время как традиционный анализ связан со строгой формулировкой и доказательством свойств реальных функций и последовательностей, топологический анализ финансового рынка позволяет изучить свойства рыночного пространства, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях, то есть в динамике. Данная особенность основана на том, что в топологии используется предварительный образ каждого набора данных, который открыт для изменений. Тем самым топологический метод анализа финансовых данных, наряду с рассмотренными в статье преимуществами, обладает значительной перспективой для освоения в финансовых исследованиях и финансовой практике.

**Библиографический список**

1. Васильев С. А., Ключников О. И., Сычев Д. А. Развитие финансовой теории и практики под воздействием больших данных // Ученые записки Международного банковского института. – 2018. – 2(24). – С. 101–123.
2. Ключников И. К., Сигова М. В., Ключников О. И. Финансовая перформативность и финансовая безопасность // Финансы и кредит. – 2023. – Т. 29 (8). – С. 1730–1759. – DOI: [10.24891/fc.29.8.1730](https://doi.org/10.24891/fc.29.8.1730).
3. Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6, № 4. – С. 769–805.
4. A Survey of Vectorization Methods in Topological Data Analysis / D. Ali [et al.] // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2023. – Dec. – Vol. 45, no. 12. – P. 14069–14080. – ISSN 1939-3539. – DOI: [10.1109/tpami.2023.3308391](https://doi.org/10.1109/tpami.2023.3308391).
5. A topological data analysis based classification method for multiple measurements / H. Riihimäki [et al.] // BMC Bioinformatics. – 2020. – July. – Vol. 21, no. 1. – ISSN 1471-2105. – DOI: [10.1186/s12859-020-03659-3](https://doi.org/10.1186/s12859-020-03659-3).
6. Allaerts W. Evaluating the connectivity, continuity and distance norm in mathematical models for community ecology, epidemiology and multicellular pathway prediction // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Nov. – Vol. 1391, no. 1. – P. 012119. – ISSN 1742-6596. – DOI: [10.1088/1742-6596/1391/1/012119](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1391/1/012119).
7. Berry T., Sauer T. Consistent manifold representation for topological data analysis // Foundations of Data Science. – 2019. – Vol. 1, no. 1. – P. 1–38. – ISSN 2639-8001. – DOI: [10.3934/fods.2019001](https://doi.org/10.3934/fods.2019001).
8. Caorsi M., Reinauer R., Berkouk N. giotto-deep: A Python Package for Topological Deep Learning // Journal of Open Source Software. – 2022. – Nov. – Vol. 7, no. 79. – P. 4846. – ISSN 2475-9066. – DOI: [10.21105/joss.04846](https://doi.org/10.21105/joss.04846).
9. Chang C., Lin H. A topological based feature extraction method for the stock market // Data Science in Finance and Economics. – 2023. – Vol. 3, no. 3. – P. 208–229. – ISSN 2769-2140. – DOI: [10.3934/dsfe.2023013](https://doi.org/10.3934/dsfe.2023013).
10. Chang C., Lin H. A topological based feature extraction method for the stock market // Data Science in Finance and Economics. – 2023. – Vol. 3, no. 3. – P. 208–229. – ISSN 2769-2140. – DOI: [10.3934/dsfe.2023013](https://doi.org/10.3934/dsfe.2023013).
11. Ghrist R. Barcodes: The persistent topology of data // Bulletin of the American Mathematical Society. – 2007. – Oct. – Vol. 45, no. 01. – P. 61–76. – ISSN 0273-0979. – DOI: [10.1090/s0273-0979-07-01191-3](https://doi.org/10.1090/s0273-0979-07-01191-3).
12. giotto-tda: A Topological Data Analysis Toolkit for Machine Learning and Data Exploration / G. Tauzin [et al.]. – 2020. – DOI: [10.48550/ARXIV.2004.02551](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2004.02551).
13. Hensel F., Moor M., Rieck B. A Survey of Topological Machine Learning Methods // Frontiers in Artificial Intelligence. – 2021. – May. – Vol. 4. – ISSN 2624-8212. – DOI: [10.3389/frai.2021.681108](https://doi.org/10.3389/frai.2021.681108).
14. Hensel F., Moor M., Rieck B. A Survey of Topological Machine Learning Methods // Frontiers in Artificial Intelligence. – 2021. – May. – Vol. 4. – ISSN 2624-8212. – DOI: [10.3389/frai.2021.681108](https://doi.org/10.3389/frai.2021.681108).
15. Khandelwal A., Chandra M. G. Quantum-Enhanced Topological Data Analysis: A Peep from an Implementation Perspective. – 2023. – DOI: [10.48550/ARXIV.2302.09553](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2302.09553).
16. Klioutchnikov I. K., Klioutchnikova A. I. Long-Tail Distribution Financial Recommender Systems Embedded into Social Networks // Communications of the IBIMA. – 2022. – July. – P. 1–19. – ISSN 1943-7765. – DOI: [10.5171/2022.165496](https://doi.org/10.5171/2022.165496).
17. Leykam D., Angelakis D. G. Topological data analysis and machine learning // Advances in Physics: X. – 2023. – Apr. – Vol. 8, no. 1. – ISSN 2374-6149. – DOI: [10.1080/23746149.2023.2202331](https://doi.org/10.1080/23746149.2023.2202331).
18. Munch E. A User’s Guide to Topological Data Analysis // Journal of Learning Analytics. – 2017. – July. – Vol. 4, no. 2. – ISSN 1929-7750. – DOI: [10.18608/jla.2017.42.6](https://doi.org/10.18608/jla.2017.42.6).
19. Nashivochnikov N., Pustarnakov V. Topological Methods of Analysis in Behavioral Analytics Systems // Voprosy kiberbezopasnosti. – 2021. – 2(42). – P. 26–36. – ISSN 2311-3456. – DOI: [10.21681/2311-3456-2021-2-26-36](https://doi.org/10.21681/2311-3456-2021-2-26-36).
20. On the use of Wasserstein metric in topological clustering of distributional data / G. Cabanes [et al.]. – 2021. – DOI: [10.48550/ARXIV.2109.04301](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2109.04301).
21. Portfolio optimization based on network topology / Y. Li [et al.] // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019. – Feb. – Vol. 515. – P. 671–681. – ISSN 0378-4371. – DOI: [10.1016/j.physa.2018.10.014](https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.10.014).
22. Rote G., Vegter G. Computational Topology: An Introduction // Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces. – Springer Berlin Heidelberg. – P. 277–312. – ISBN 9783540332589. – DOI: [10.1007/978-3-540-33259-6\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-33259-6_7).
23. Topological Deep Learning: A Review of an Emerging Paradigm / A. Zia [et al.]. – 2023. – DOI: [10.48550/ARXIV.2302.03836](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2302.03836).
24. Topological Parallax: A Geometric Specification for Deep Perception Models / A. D. Smith [et al.]. – 2023. – DOI: [10.48550/ARXIV.2306.11835](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2306.11835).
25. Umeda Y. Time Series Classification via Topological Data Analysis // Transactions of the Japanese Society for Artificial Intelligence. – 2017. – Vol. 32, no. 3. – ISSN 1346-8030. – DOI: [10.1527/tjsai.d-g72](https://doi.org/10.1527/tjsai.d-g72).

26. Why topological data analysis detects financial bubbles? / S. W. Akingbade [et al.] // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2024. – Jan. – Vol. 128. – P. 107665. – ISSN 1007-5704. – DOI: [10.1016/j.cnsns.2023.107665](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107665).
27. El-Yaagoubi A. B., Chung M. K., Ombao H. Topological Data Analysis for Multivariate Time Series Data // *Entropy*. – 2023. – Nov. – Vol. 25, no. 11. – P. 1509. – ISSN 1099-4300. – DOI: [10.3390/e25111509](https://doi.org/10.3390/e25111509).