

УДК 330.43 DOI: 10.14451/1.220.202

Исследование аппроксимации макроэкономических моделей

© 2023 **Катаргин Николай Викторович**

Кандидат физико-математических наук, доцент. Департамент математики. Финансовый университет при Правительстве РФ. Россия, Москва.

E-mail: nnnkkk@yandex.ru

© 2023 **Качалина Екатерина Александровна**

студент. Финансовый университет при Правительстве РФ. Россия, Москва.

E-mail: katerinkak2002@gmail.com

Ключевые слова: макроэкономические модели, нелинейная регрессия, автокорреляция, метод Монте-Карло.

Проведено исследование временных рядов макроэкономических переменных США в 1960–2021 гг.: ВВП, государственные закупки, инвестиции, потребление, налоги, денежная масса, ключевая ставка, чистый экспорт. Выявлена независимость переменных от денежной массы и ключевой ставки. Вклады одних переменных в формирование других выделить невозможно, поэтому нецелесообразно строить и использовать для прогнозирования сложные макроэкономические модели из нескольких уравнений с большим количеством коэффициентов и переменных, тем более – с эндогенными переменными в правых частях структурных моделей. Но соотношения переменных можно оценить и использовать для прогнозирования. Обсуждается возможность включения времени в макроэкономические модели, линейно-синусоидальной аппроксимации ВВП от времени и оценки переменных по лаговым значениям ВВП, а также оценки погрешностей коэффициентов методом Монте-Карло.

Существует множество макроэкономических моделей, пытающихся выявить взаимное влияние переменных:

Y – ВВП, C – потребление, I – инвестиции, G – государственные закупки, T – налоги, NX – чистый экспорт, R – ключевая ставка, $M2$ – денежная масса, e – обменный курс.

Различные модели, связывающие эти и другие переменные, и методы их настройки по реальным данным приведены, например в работах

И. И. Елисеевой [8; 11].

При изучении макроэкономики также учитываются инфляция (дефляторы), безработица, цены на золото, нефть и т. д. Но $Y, C, I, G, M2$ коррелируют между собой, растут одновременно, и очень трудно понять истинные причины их изменения. Существуют различные методы прогнозирования макроэкономических переменных, как по уровням одного ряда (ARIMA), так и сложные, использующие многомерные вычисления и выделение главных компонент [7; 9; 12;

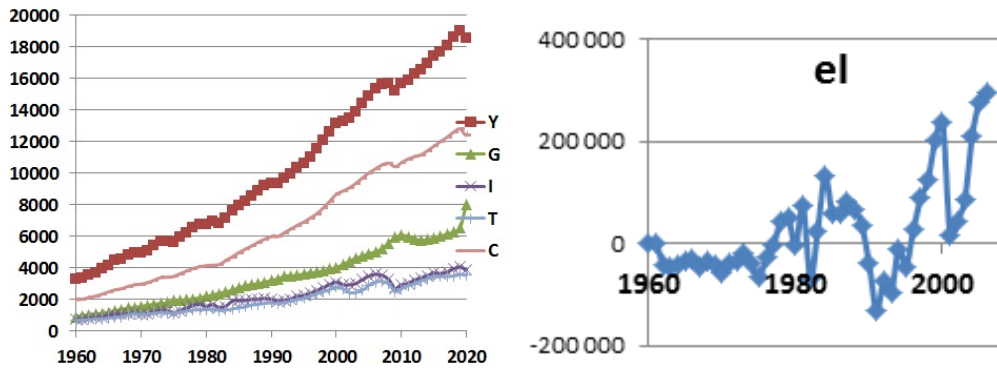


Рис. 1. а): Отклонения оцененных значений инвестиций от реальных; б): Графики Y, G, I, T, C.

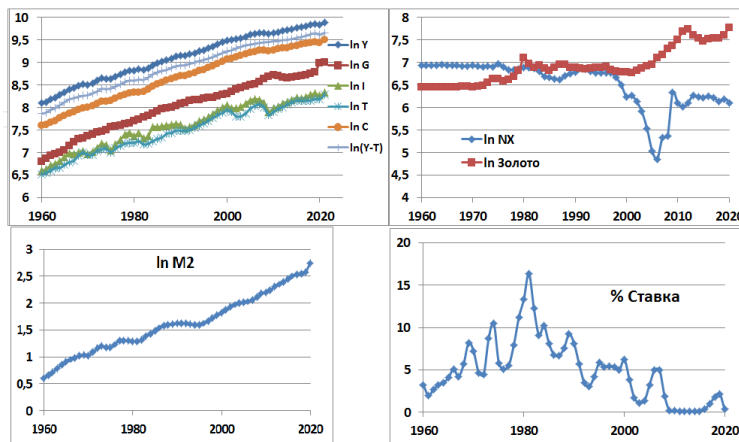


Рис. 2. Графики ставки R и логарифмов Y, G, I, T, C, M2, NX, цены золота.

15; 16]. Временные ряды рассматриваются как совокупности гармонических колебаний с разными амплитудами и частотами [6; 14; 17; 18]. Обычно эти временные ряды аппроксимируют экспонентой, которая линеаризуется логарифмированием [10], и мы тоже это применим, но рассматриваются и другие функции, например, гипербола $A(t) = C/(t_0 - t)^k$, уходящая в бесконечность в точке $t = t_0$, что означает фазовый переход, катастрофу. Такие модели построены как для производства [4], так и для населения Земли [2]. На самом деле это не произойдет, так как ресурсы Земли ограничены. Да, пока продолжается экспоненциальный рост населения и производства, но, согласно модели Д. Медоуза 1972 года [13; 19], максимум будет достигнут в 2040–50 гг., затем начнется спад. Стабилизация возможна, если люди откажутся от безумной деятельности по добыче ресурсов, изготовлению и продаже навязываемых товаров,

вывозу их на свалки [1; 3; 5]. Но пока признаков перестройки экономики незаметно.

Целью настоящей работы является настройка некоторых макроэкономических моделей по обновленным данным, а также оценка погрешностей и выявление тонких эффектов взаимного влияния переменных.

Возникает вопрос: как сделать прогноз на несколько лет вперед? Как на зависимости переменных повлияют кризисы? Как использовать тождество национальных счетов, т. е. строить итерационную модель, используя $Y_{sum} = C + I + G$? Как спрогнозировать ВВП на несколько лет в безкризисный период? Наконец, графики Y, C, I, G, M2 от времени – экспоненты, что обуславливает высокие значения коэффициентов корреляции ($> 0,98$), а также рост разностей реальных и оцененных значений, т. е. гетероскедастичность (Рис. 16)). Существуют ли кор-

	t	$\ln Y$	$\ln G$	$\ln I$	$\ln M2$	$\ln NX$	$\ln T$	$\ln C$	$\ln(Y-T)$	$\ln dY$	$\ln \text{Золото}$
t	1										
$\ln Y$	0,9935102	1									
$\ln G$	0,9907279	0,995	1								
$\ln I$	0,979704	0,992	0,981	1							
$\ln M2$	0,9883031	0,974	0,977	0,961	1						
$\ln NX$	-0,744745	-0,754	-0,733	-0,77	-0,731	1					
$\ln T$	0,9880835	0,995	0,986	0,992	0,969	-0,756	1				
$\ln C$	0,9940672	1	0,994	0,99	0,973	-0,76	0,994	1			
$\ln(Y-T)$	0,9934964	1	0,995	0,991	0,974	-0,753	0,993	1	1		
$\ln dY$	0,0151897	0,022	0,033	0,013	-0,001	0,072	0,011	0,026	0,025	1	
$\ln \text{Золото}$	0,9017248	0,863	0,882	0,835	0,923	-0,613	0,849	0,863	0,865	-0,05	1
% Ставка	-0,494381	-0,458	-0,423	-0,428	-0,516	0,487	-0,46	-0,465	-0,456	-0,073	-0,44191

Рис. 3. Корреляционная матрица логарифмов макроэкономических показателей.

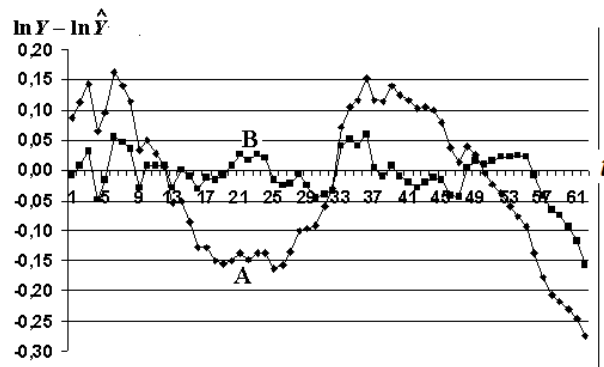


Рис. 4. Разности логарифмов реального и оцененного ВВП при линейной (А) и линейно-синусоидальной (В) регрессии [3].

реляции отклонений переменных от трендов? Экономические модели часто калибруют по значениям, приведенным к ценам какого-либо года (дефлятор).

Нами проведено исследование временных рядов макроэкономических переменных США: валовый внутренний продукт (ВВП) Y , государственные закупки G , инвестиции I , потребление C , налоги T , денежная масса $M2$, ключевая ставка R , чистый экспорт NX . Данные взяты с сайтов: <https://fred.stlouisfed.org>, <https://data.worldbank.org>, <https://www.bea.gov>, https://nma.org/wp-content/uploads/2016/09/historic_gold_prices_1833_pres.pdf, <https://cbonds.ru/indexes/354>.

На графиках (Рис. 1а)) видно, что $Y, G, I, C, T, M2$ имеют экспоненциальную зависимость от времени. Поэтому расчеты проводились, в основном, с логарифмами этих величин. Выявлена почти линейная зависимость от времени (Рис. 2), а также очень высокие коэффициенты корреля-

ции, в том числе со временем (Таблица 3).

Это означает, что изменение всех переменных во времени не зависит от процентной ставки R , по крайней мере, с точки зрения эконометрики. Чистый экспорт NX и цена золота при кризисе 2008 г. двигались разнонаправленно, до кризиса почти не коррелируют. $Y, G, I, C, T, M2$ сильно коррелируют между собой и со временем. В сложных моделях с системами одновременных уравнений это означает мультиколлинеарность, то есть выявить и рассчитать истинное влияние переменных друг на друга в принципе невозможно. Может быть, главным влияющим фактором является время? Коэффициенты в макроэкономических моделях позволяют оценить средние соотношения между переменными, например, ВВП и потребления, но не позволяют экстраполировать функции в будущее и сделать прогноз. Аппроксимирующие функции прекрасно лягут на реальные данные, но в зоне прогноза могут дать большие систематические отклонения. Осо-

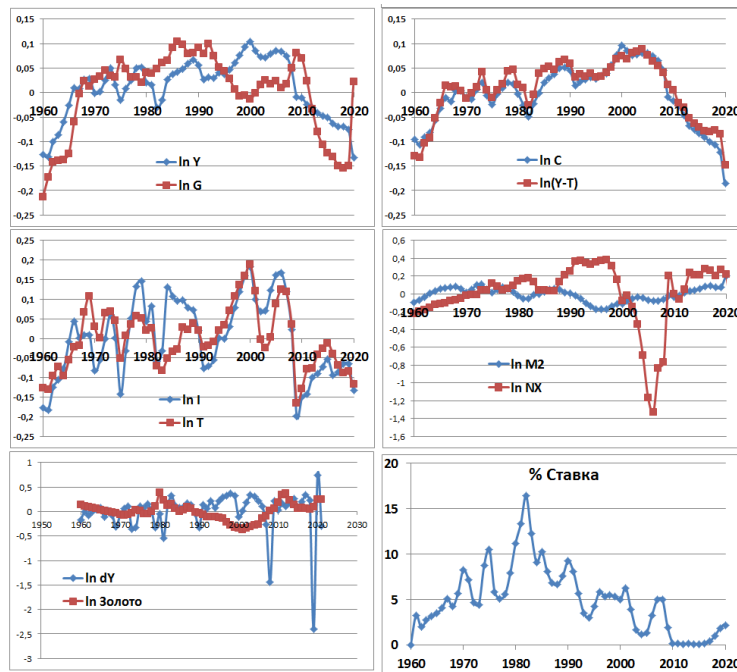


Рис. 5. Отклонения логарифмов макроэкономических величин от линейных трендов.

	t	ln Y	ln G	ln I	ln M2	ln NX	ln T	ln C	ln(Y-T)	ln dY	ln Золото
t	1										
ln Y	0,027	1									
ln G	0,004	0,662	1								
ln I	-0,004	0,832	0,387	1							
ln M2	0,996	-0,014	-0,006	-0,027	1						
ln NX	-0,932	-0,093	0,017	-0,104	0,052	1					
ln T	-0,009	0,786	0,332	0,791	-0,038	-0,061	1				
ln C	-0,056	0,97	0,614	0,758	-0,106	-0,044	0,718	1			
ln(Y-T)	-0,012	0,981	0,707	0,778	-0,053	-0,051	0,657	0,969	1		
ln dY	0,015	0,063	0,13	-0,008	0,005	0,031	-0,023	0,098	0,083	1	
ln Золото	-0,007	-0,673	-0,187	-0,557	0,037	0,079	-0,632	-0,71	-0,628	-0,148	1
% Ставка	-0,438	0,351	0,561	0,332	-0,448	0,48	0,238	0,308	0,379	-0,063	-0,01796

Рис. 6. Корреляционная матрица отклонений логарифмов макроэкономических показателей от линейных трендов (кроме ставки R).

бенно это касается множественной регрессии и сложных моделей из нескольких одновременных уравнений с эндогенными переменными, входящими в правые части уравнений.

$$\ln \hat{Y}(t) = a + bt + d \sin(\omega t + \varphi), \text{ или}$$

$$\ln \hat{Y}(t) = 5,14 + 0,0754 \cdot t + 0,154 \cdot \sin(0,1736 \cdot t + 0,83 \cdot \varphi).$$

Что делать? Остается изучать тонкие эффекты, связанные с отклонениями переменных от трендов. Для исследования используем логарифмы переменных. В связи с тем, что NX бывает отрицательным, используется $\ln(NX + 1000)$. Во многих моделях экзогенной переменной является Y, а также его приращение dY. Ранее [13] было показано, что тренд $\ln Y$ в интервале 1947–2007 гг. аппроксимируется формулой

Угловая частота $\omega = 0,1736$ соответствует периоду 36 лет, то есть приблизительно длине волны Кондратьева.

Аналогичные результаты получены для логарифмов C. Для логарифмов I, T, dY, V2, NX периодических отклонений от линейных трендов не наблюдается (Рис. 5). Процентная ставка R не

ln Y	ln G	ln I	ln M2	ln NX	ln T	ln C	ln(Y-T)	ln dY	ln Золд	% Ставка
0,932	0,653	0,687	-0,3	-0,09	0,727	0,91	0,907	0,075	-0,54	0,111
0,812	0,647	0,449	-0,42	-0,14	0,558	0,811	0,801	-0,03	-0,47	0,141
0,654	0,613	0,225	-0,49	-0,14	0,321	0,683	0,676	0,022	-0,42	0,024
0,504	0,544	0,103	-0,52	-0,18	0,148	0,565	0,563	0,08	-0,36	-0,107
0,363	0,413	0,067	-0,55	-0,23	0,011	0,448	0,441	0,111	-0,25	-0,218

Рис. 7. Автокорреляции отклонений логарифмов макроэкономических показателей от линейных трендов (кроме ставки R).

ln Y	ln G	ln I	ln M2	ln NX	ln T	ln C	ln(Y-T)	ln dY	ln Золд	% Ставка
0,906	0,863	0,56	-0,071	0,688	0,712	0,877	0,884	-0,069	-0,241	0,421
0,751	0,853	0,265	-0,279	0,744	0,532	0,73	0,733	0,041	-0,188	0,484
0,602	0,792	0,136	-0,411	0,753	0,416	0,59	0,582	0,138	-0,227	0,398
0,48	0,688	0,096	-0,484	0,694	0,306	0,49	0,476	0,197	-0,269	0,288
0,402	0,548	0,133	-0,532	0,629	0,168	0,422	0,438	0,219	-0,283	0,184
0,342	0,389	0,176	-0,555	0,527	0,047	0,395	0,408	0,317	-0,226	0,095
0,359	0,216	0,277	-0,566	0,396	-0,018	0,407	0,453	0,347	-0,169	-0,01

Рис. 8. Корреляции высоких порядков отклонений от линейных трендов логарифмов Y и других переменных.

имеет линейного тренда, на рисунке представлены исходные величины.

Таким образом, прогнозируя ВВП по линейно-синусоидальному тренду, можно прогнозировать связанные с ним G, C, I, T, M2 и R зависят, в основном, от политики правительства и Центрального банка, т. е. являются экзогенными переменными в моделях. Конечно, они влияют на ВВП и связанные с ним показатели, но явной корреляции (для США) не обнаружено, несмотря на то, что в разных моделях, например в IS-LM, в явном виде предполагается зависимость инвестиций I от R. NX и цена золота не являются связанными с ВВП, G, C, I, T.

Возникает вопрос: можем ли мы предсказывать отклонения от тренда по предыдущим значениям временного ряда? В этом помогут графики Рис. 5, корреляционная матрица отклонений логарифмов макроэкономических показателей от линейных трендов (Таблица 6) и автокорреляции в рядах этих отклонений (Таблица 7)

Видны высокие коэффициенты автокорреляции 1–2 порядков для Y, G, C, I, T, значит, их отклонения от тренда можно с большой вероятностью прогнозировать на 1–2 шага вперед. Вычислены корреляции высоких порядков для остатков логарифмов Y с остатками для остальных величин (Таблица 8). Выявлены высокие (> 0,7)

для G, M2, T, C, Y – T только для 1-го порядка. Получена своеобразная коррелограмма для чистого экспорта NX в зависимости от лагового ВВП (Рис. 9a)). Ее можно интерпретировать как влияние ВВП на NX в течение нескольких лет.

Попробуем все же построить модифицированную и расширенную модель Самуэльсона-Хикса с включением M2 и цены золота Au для периода 1960–2007 гг., до кризиса. 1960–1999 годы используем для настройки модели, 2000–07 гг. – для проверки адекватности. Используем логарифмы данных с поправкой на дефлятор ВВП. Влияющими переменными являются лаговые значения $Y_{sum} = C + I + G$, кроме госрасходов G. Тожество $Y = C + I + G$ для прогнозирования Y и Y_{sum} не используется, так как в реальности не соблюдается (Таблица 1).

Попытки его использования для прогнозирования Y привели к неадекватным результатам. В модели использовали как линейную, так и линейно-синусоидальную аппроксимацию Y от времени. Представлены коэффициенты детерминации R^2 для диапазона 2000–07. В 2008 году начался кризис, и графики существенно расходятся (Рис. 10), особенно M2, но так уж случилось. Если использовать не экстраполированные, а реальные значения Y, то графики реальных и оцененных значений инвестиций

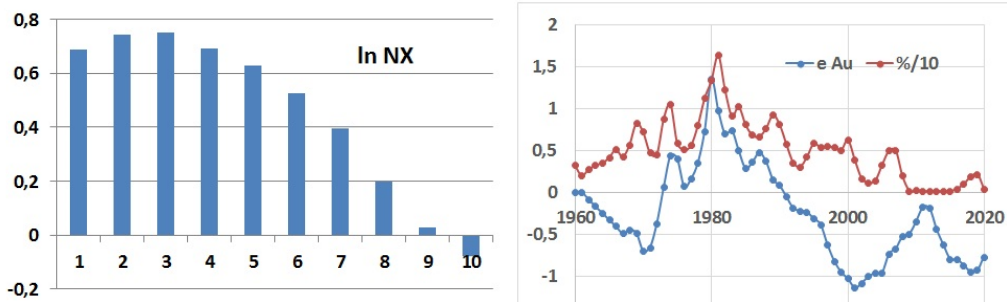


Рис. 9. а): Корреляции порядков 1–10 для отклонений логарифмов Y и NX от линейных трендов; б): Временные ряды логарифмов цен на золото (Au) и ключевой ставки.

Таблица 1. Разница реальных ВВП Y и $Y_{sum} = G + C + I$.

Год	Y	Ysum	G	C	I
1960	543,3	602,6	149	122,5	331,2
1961	563,3	629,7	161,7	126,5	341,5
1962	605,1	676,6	174,5	139,6	362,6
1987	4855,2	5904,3	1681,2	1146,8	3076,3
1988	5236,4	6289,8	1764,5	1195,4	3330
1989	5641,6	6743,9	1897	1270,1	3576,8
2018	20533,1	25196,9	6937,7	4354,2	13905
2019	21381	26289,8	7338,8	4558,3	14392,7
2020	21060,5	27658,7	9109,1	4433,4	14116,2
2021	23315,1	30409,1	9586,1	4920,5	15902,6

и потребления прекрасно совпадают до 2021 года, т. е. прогнозировать их на несколько лет вперед во время кризиса не получится, но взаимное влияние в каждом временном интервале сохраняется.

Линейно-синусоидальная модель аппроксимации $\ln Y$ проверена методом Монте Карло. Создавались случайные временные ряды:

$$\ln Y_{sum} + Se \cdot \text{НОРМ.СТ.ОБР(СЛЧИС)},$$

где $Se = 0,0341$ – стандартное отклонение остатков в зоне настройки. Использовался Метод наименьших квадратов с сервисом Excel «Поиск решения». Проведено 50 опытов, результаты представлены в Таблице 2. Обратите внимание на высокие коэффициенты корреляции a-d, a-f, d-f. Полученное значение W соответствует периоду 263 года, т. е. резко отличается от пери-

ода, полученного для 1947–2005 гг. Амплитуда d также существенно меньше, ее погрешность 180%. Значит, данных для сложной аппроксимации не хватает, и оптимальным является линейный тренд.

Полученная модель: R^2 (2000–07)

$$\ln Y = 8,135 + 0,032 \cdot t - 0,004 \cdot \sin(0,024 \cdot t + 2,553)0,942$$

$$\ln C = -1,052 + 1,07 \cdot \ln Y(t - 1)0,957$$

$$\ln I = -0,81 + 1,05 \cdot \ln Y(t - 1) - 0,125 \cdot Y(t - 2)0,74$$

$$\ln G = 0,222 + 0,976 \cdot \ln G(t - 1)0,80$$

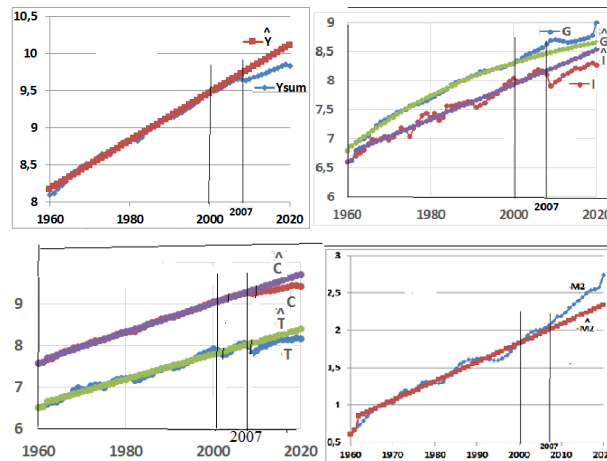
$$\ln T = -0,925 + 0,926 \cdot \ln Y(t - 1)0,39$$

$$\ln Au = -16,5 + 2,45 \cdot \ln Y(t - 1)0,78$$

Вывод: Вклады одних переменных в формирование других выделить невозможно, поэтому нецелесообразно строить и использовать для про-

Таблица 2. Средние значения, относительные погрешности и корреляции коэффициентов линейно-синусоидальной аппроксимации \hat{Y} .

	среднее	S/k · 100%		a	b	d	w
a	8,135	0,007606	a	1			
b	0,032	1,052608	b	-0,518	1		
d	-0,004	-179,9771	d	0,874	-0,617	1	
w	0,024	9,38186	w	0,139	-0,261	0,343	1
f	2,553	0,103671	f	-0,817	0,548	-0,932	-0,194

**Рис. 10.** Истинные и оцененные значения логарифмов $Y, G, I, C, T, M2$.

гнозирования сложные макроэкономические модели из нескольких уравнений с большим количеством коэффициентов и переменных, тем более – с эндогенными переменными в правых

частях структурных моделей. Но соотношения переменных можно оценить и использовать для прогнозирования.

Библиографический список

1. Бодрунов С. Д., Воейков М. А. Государство, ноономика и постклассическая политэкономия // Вопросы политической экономии. – 2021. – 4 (28). – С. 22–37.
2. Капица С. П. Сколько людей жило, живёт и будет жить на Земле. Очерк теории роста человечества. – М.: Наука, 1999. – 345 с.
3. Катаргин Н. В., Филиппович Е. А. Настройка макроэкономических моделей с использованием метода Ньютона // Международный научный журнал № 1. – 2010. – С. 15–18.
4. Кириллюк И. Л., Малков С. Ю., Малков А. С. Особенности долгосрочной динамики мировой системы: анализ статистических данных // Прикладная эконометрика. – 2009. – 4 (16). – С. 34–45.
5. Колганов А. И. Эволюция содержания человеческой деятельности и изменение структуры экономики // Ноономика и нообщество. Альманах трудов ИНИР им. С. Ю. Витте. – 2022. – Т. 1, № 1. – С. 65–80. – DOI: 10.37930/2782-618X-2022-1-1-65-80.
6. Микош Х., Соланко Л. Прогнозирование роста российского ВВП с использованием данных со смешанной периодичностью // Деньги и кредит. – 2019. – 78 (1). – С. 19–35.
7. Поршаков А. С., Пономаренко А. А., Синяков А. А. Оценка и прогнозирование ВВП России с помощью динамической факторной модели // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2016. – № 2. – С. 60–76.
8. Практикум по эконометрике / под ред. И. И. Елисейевой. – М.: Финансы и статистика, 2006. – С. 121–127.
9. Станкевич И. П. Сравнение методов наукастинга макроэкономических индикаторов на примере российского ВВП // Прикладная эконометрика. – 2020. – Т. 59. – С. 113–127.
10. Фокин Н. Д. О важности учёта структурных сдвигов при прогнозировании российского ВВП // Прикладная эконометрика. – 2021. – Т. 63. – С. 5–29.

11. Эконометрика / под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 575 с.
12. Barnett W., Chauvet M., Leiva Leon D. Real-time nowcasting of nominal GDP with structural breaks // Journal of Econometrics. – 2015. – Dec. – Vol. 191. – P. 312–324. – DOI: [10 . 1016 / j . jeconom.2015.12.004](https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.12.004).
13. Beyond the limits / ed. by D. H. Meadows [et al.]. – Toronto, 1992. – 352 p.
14. Clark P. The Cyclical Component of U. S. Economic Activity // The Quarterly Journal of Economics. – 1987. – Vol. 102, no. 4. – P. 797–814.
15. Clements M., Galvo A. Forecasting US output growth using leading indicators: an appraisal using MIDAS models // Journal of Applied Econometrics. – 2009. – Vol. 24, no. 7. – P. 1187–1206.
16. Clements M., Hendry D. Forecasting economic processes // International Journal of Forecasting. – 1998. – Vol. 14, no. 1. – P. 111–131.
17. Ferrara L., Marsilli C. Nowcasting global economic growth: A factor-augmented mixed-frequency approach : Working papers / Banque de France. – 2014. – No. 515. – URL: <https://ideas.repec.org/p/bfr/banfra/515.html>.
18. Ghysels E., Kvedaras V., Zemlys V. Mixed Frequency Data Sampling Regression Models: The R package midasr // Journal of Statistical Software. – 2016. – Vol. 72, no. 4. – DOI: [10.18637/jss.v072.i04](https://doi.org/10.18637/jss.v072.i04).
19. Limits to growth / ed. by D. H. Meadows [et al.]. – N.Y. : Universe Book, 1972.