Распространение информации с учетом ее субъективной и объективной полезности

© 2009 А.Д. Чернявский
кандидат физико-математических наук
Нижегородский институт менеджмента и бизнеса

Рассмотрена модель распространения информации в предположении одновременного воздействия объективной и субъективной полезности такого блага, как информация. Показано, что под влиянием функциональной зависимости скорости изменения субъективной полезности эффективность распространения может многократно изменяться.

Ключевые слова: информация, субъективная и объективная полезность, модель распространения.

Рассмотрим задачу моделирования процесса распространения информации, имеющей оценку как объективной, так и субъективной полезности. Предполагаем распространение информации в ограниченной аудитории численностью N_0 человек.

Считаем, что во внешней среде каждого индивида в выбранной аудитории - "приемника" распространяемая информация считается объективно полезной с некоторой вероятностью P_1. Для определения P_1 сделаем ряд допущений. Во-первых, считаем, что источник информации равномерно распределен в аудитории, т.е. плотность вероятности, приходящаяся на каждого индивида в аудитории f_1:

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{N_0}, \qquad (1)$$

где $f(z)$ - плотность вероятности информации, распространяемой в аудитории, т.е. предполагаемой объективно полезной.

Предположим далее, что имеем только временную зависимость для $f(z) = f(t)$ и с учетом старения объективно полезной информации[1] можем записать:

$$f(t) = \mu_1 \exp(-\mu_1 t), \qquad (2)$$

где μ_1 - "эффективное" время старения объективно полезной информации.

Используя (2), можем записать вероятность получения за время t объективно полезной информации каждым из N принявших ее "приемников":

$$P_1 = \frac{\mu_1 \cdot N}{N_0}\int_0^t \exp(-\mu_1 z)dz = \frac{N}{N_0}\left(1-\exp(-\mu_1 t)\right). \qquad (3)$$

Далее используем линейную модель роста численности аудитории "приемников", воспринимающих информацию:

$$\frac{dN}{dt} = P_1 \cdot \gamma \cdot P_2 \cdot N, \qquad (4)$$

где P_1 - вероятность восприятия информации "приемником" как объективно полезной;
γ - коэффициент передачи информации приемником из внешней среды во внутреннюю;
P_2 - вероятность восприятия информации "приемником" во внутренней его среде как субъективно полезной.

Для дальнейшего анализа сделаем еще ряд допущений[2]. Существует некий внутренний источник полезности информации x с функциональной зависимостью $\Phi(x)$. При этом функциональная зависимость $\Phi(x)$ может быть представлена в виде ряда следующих типичных зависимостей:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{x^{\alpha_1}} \quad (\lambda > 0;\ 0 \le \alpha_1 < 1); \qquad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x^{\alpha_2} \quad (\lambda > 0); \qquad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \quad (\lambda > 0); \qquad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (8)$$

Далее предположим, что существует источник информации с субъективной полезностью x, которая во времени описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x), \qquad (9)$$

и его решение $t = G(x)$.

Кроме того, существует известная плотность вероятности субъективной полезности $f(t)$. Тогда плотность вероятности в переменной субъективной полезности информации x запишется в виде

$$f(x) = f\left[t(x)\right] \cdot t_x^{\prime} = f((x))G_x^{\prime}(x). \qquad (10)$$

Следующим допущением является предположение старения субъективно полезной инфор-

[1] *Горбунова Л.Л.* Проблемы методологии исследования диагностики образовательных потребностей // Проблемы современной экономики. 2004. №4(12).

[2] *Чернявский А.Д.* Модель распространения информации с учетом субъективной полезности // Экон. науки. 2008. №48(ноябрь).

мации по экспоненциальному закону (2) с показателем μ_2.

Последовательно рассмотрим влияние зависимости источника субъективно полезной информации в случае зависимости его интенсивности вида (5)-(8).

1. *Случай гиперболически убывающей интенсивности источника субъективной полезности.*

Из дифференциального уравнения (5) с учетом начального условия $x(0) = 0$ находим:

$$t = \frac{x^{\alpha_1+1}}{\lambda(\alpha_1+1)};\, t'_x = \frac{x^{\alpha_1}}{\lambda}. \qquad (11)$$

В соответствии со сделанным выше допущением считаем, что плотность вероятности субъективной полезности от времени:

$$f_2(t) = \mu_2 \cdot \exp(-\mu_2 t). \qquad (12)$$

Тогда $f_2(x)$ с учетом преобразования (10):

$$f_2(x) = \frac{\mu_2}{\lambda}\exp\left[-\frac{\mu_2}{\lambda(\alpha_1+1)}x^{(\alpha_1+1)}\right]\cdot x^{\alpha_1}. \qquad (13)$$

Соответственно, находим:

$$f_2(N) = \frac{\mu_2}{\lambda}\exp\left[-\frac{\mu_2}{\lambda(\alpha_1+1)}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{(\alpha_1+1)}\right]\cdot\frac{1}{N_0}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{\alpha_1}. \qquad (14)$$

Интегрируя (14), находим величину вероятности субъективной полезности P_2:

$$P_2(N) = \int\limits_0^N f_2(z)dz = 1-\exp\left[-\xi_2\left(\frac{N}{N_0}\right)^{\alpha_1+1}\right], \qquad (15)$$

где $\xi_2 = \dfrac{\mu_2}{\lambda(\alpha_1+1)}$.

С учетом (3), (15) перепишем уравнение (4):

$$\frac{dn}{d\tau} = \left(1-\exp(-\xi_1\tau)\right)\left(1-\exp(-\xi_2 n^{\alpha_1+1})\right)\cdot n^2, \qquad (16)$$

где $n = \dfrac{N}{N_0};\, \tau = \gamma t;\, \xi_1 = \dfrac{\mu_1}{\gamma};\, \xi_2 = \dfrac{\mu_2}{\lambda(\alpha_1+1)}$.

Для решения в первом приближении используем разложение правой части (16) в ряд Тейлора. С учетом этого получим:

$$\frac{dn}{d\tau} = \xi_2 n^{(3+\alpha_1)}. \qquad (17)$$

Интегрируя (17), находим:

$$\frac{1}{n^{(2+\alpha_1)}} = \frac{1-(2+\alpha_1)\xi_2 n(0)^{(2+\alpha_1)}}{n^{(2+\alpha_1)}(0)}. \qquad (18)$$

Зададим критическое время из условия $n(\tau_{кр}) = 1$ и в соответствии с (18) определим:

$$\tau_{кр} = \frac{1-n(0)^{(2+\alpha_1)}}{(2+\alpha_1)\xi_2 n(0)^{(2+\alpha_1)}}. \qquad (19)$$

С учетом для большинства реальных ситуаций выполнения условия $n(0) \ll 1$ находим:

$$\tau_{кр} \approx \frac{1}{(2+\alpha_1)\xi_2 n(0)^{(2+\alpha_1)}}. \qquad (20)$$

Из (20) видно, что с ростом параметра α_1 критическое время $\tau_{кр}$ будет нарастать, т.е. более крутой спад интенсивности в (5) источника субъективной полезности от ее величины ведет к росту $\tau_{кр}$.

Отметим, что погрешность вклада отбрасываемых членов пропорциональна $\dfrac{x_i}{x_{i-1}}$, т.е. $\xi_2 \cdot n(0)$ и отсюда вытекает, что с уменьшением параметра ξ_2 погрешность линейной аппроксимации также уменьшается.

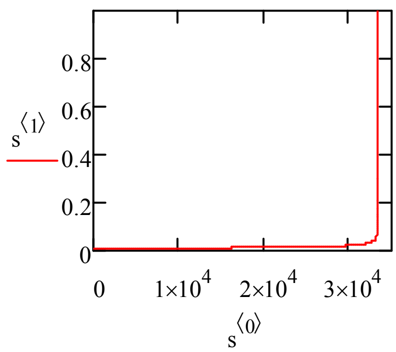

Рис. 1. Зависимость концентрации "приемников", принимающих информацию как полезную, в соответствии с (16) для $\alpha_1 = 1; \xi_1 = 1; \xi_2 = 10; n(0) = 0{,}01$. Оси $n = s^{<1>}$; $\tau = s^{<0>}$.

На рис.1 приведен результат численного расчета в Mathcad14 уравнения (16), подтверждающий выводы о форме зависимости $n(\tau)$. Полученное значение критического времени $\tau_{кр} = 33385$.

Рассмотрим случай первого приближения для $\alpha_1 = 1$, что в соответствии с (19) дает величину

$$\tau_{кр} = \frac{1}{3\xi_2 n(0)^3}. \qquad (21)$$

Далее в таблице приведены сравнительные величины $\tau_{кр}$ для случаев численного решения

Сравнение значений $\tau_{крит}$ для случая численного решения по (16) и линейного приближения по (24) для $\alpha_1 = 1; n(0) = 0{,}01; \xi_1 = 10$

Значение ξ_2	50	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\tau_{кр}$ - численное решение (16)	6719	3382	1721	1167	890	724	614	535	476	436	393
$\tau_{кр}$ - первое приближение (21)	6666	3333	1667	1111	833	667	555	476	415	371	333
Относит. ошибка $\frac{Стр.1 - Стр.2}{Стр.1} \cdot 100\ \%$	0,8	1,4	3,1	4,8	6,8	7,9	9,6	11,0	12,8	14,9	15,3

уравнения (16) в пакете Mathcad14 методом Рунге-Кутта четвертого порядка с адаптивным шагом, найденного приближенно в соответствии с (21). Рост величины относительной погрешности между решением, найденным в виде первого приближения, и точным решением, полученным численным решением дифференциального уравнения, с ростом параметра ξ_2 подтверждает сделанное ранее замечание о его вкладе в погрешность.

2. *Случай нарастающей интенсивности источника субъективной полезности пропорционально ее амплитуде.* Интенсивность источника субъективной полезности в соответствии с (6):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x^{\alpha_2}. \qquad (22)$$

Решение данного уравнения в соответствии с методикой расчета для предыдущего случая дает зависимость субъективной вероятности $P_2(N)$ в виде следующего уравнения:

$$P_2(N) = 1 - \exp\left[-\frac{\mu_2}{\lambda(1-\alpha_2)}\left(\frac{N}{N_0}\right)^{(1-\alpha_2)}\right]. \qquad (23)$$

Соответственно, уравнение (4) примет вид

$$\frac{dn}{d\tau} = (1 - \exp(-\xi_1\tau))\left(1 - \exp(-\xi_3 n^{(1-\alpha_2)})\right) \cdot n^2, \qquad (24)$$

где $n = \dfrac{N}{N_0}; \tau = \gamma t; \xi_1 = \dfrac{\mu_1}{\gamma}; \xi_3 = \dfrac{\mu_2}{\lambda(1-\alpha_2)}$.

Уравнение (23) переходит в (16) при замене $\alpha_1 = -\alpha_2$. Оценим правые части уравнений, т.е. соотношение интенсивностей источников субъективной полезности информации. Требуем выполнение условия:

$$\frac{dn/d\tau\_из\_ф.(24)}{dn/d\tau\_из\_ф.(16)} > 1. \qquad (25)$$

Проведя преобразование правых частей уравнений, находим, что для выполнения этого условия необходимо выполнение требования:

$$\frac{\xi_3}{\xi_2} > n^{(\alpha_1+\alpha_2)}. \qquad (26)$$

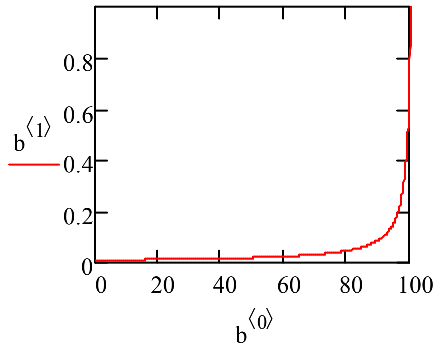

***Рис. 2.* Зависимость концентрации "приемников", принимающих информацию как полезную, в соответствии с (24) для $\alpha_2 = 0{,}5; \xi_1 = 1; \xi_3 = 40; n(0) = 0{,}01$. Оси $n = b^{<1>}$; $\tau = b^{<0>}$.**

На рис. 2 приведен результат численного расчета в Mathcad14 уравнения (24), подтверждающий выводы о форме зависимости $n(\tau)$. Полученное значение критического времени $\tau_{кр} = 101$.

Следует указать на практически важный результат - значительно более меньшую величину $\tau_{кр}$, которая в 330 раз меньше, чем в предыдущем случае.

Учитывая $n < 1$, условие (26) можно представить в более жесткой форме: $\xi_3 > \xi_2$, что гарантирует обеспечение более высокой скорости роста численности "приемников" для случая, описываемого уравнением (23). Последнее условие в соответствии с используемыми обозначениями выполняется всегда, поскольку $\xi_3/\xi_2 = (1+\alpha_1)/(1-\alpha_2)$.

Отметим, что для исключения появления полюсов в решении дифференциального уравнения (22) исключаем случай $\alpha_2 = 1$. При этом возможны две ситуации.

1. *Случай* $\alpha_2 < 1$. Тогда при $\xi_3 n^{(1-\alpha_2)} >> 1$ можем пренебречь вторым экспоненциальным

множителем в (24) и представить исходно уравнение в виде:

$$\frac{dn}{d\tau} = (1 - \exp(-\xi_1 \tau)) \cdot n^2. \quad (27)$$

Решение этого уравнения для $\tau_{кр}$ находим из условия $n(\tau_{кр}) = 1$, что дает:

$$\tau_{кр} = \frac{1}{n(0)} - 1 + \frac{1}{\xi_1} \approx \frac{1}{n(0)} \text{ для } n(0) << 1 \quad (28)$$

2. *Случай* $\alpha_2 > 1$. Второй экспоненциальный множитель может быть представлен в виде $1 - \exp(-\xi_3 n^{-(\alpha_2 - 1)})$. И мы возвращаемся к нашему предыдущему случаю.

Таким образом, в случае источника с нарастающей интенсивностью субъективной полезности информации можем получить время критического роста численности "приемников", субъективно оценивающих информацию как полезную $\tau_{кр} \approx \frac{1}{n(0)}$.

Важно отметить, что эта зависимость при значительных величинах ξ_1, ξ_2, ξ_3 показывает, что критическое время не будет зависеть от них.

3. *Случай постоянной интенсивности источника субъективно полезной информации.*

Исходное дифференциальное уравнение для роста численности "приемников" можем записать из (24) положив $\alpha_2 = 0$:

$$\frac{dn}{d\tau} = (1 - \exp(-\xi_1 \tau))(1 - \exp(-\xi_3 n)) \cdot n^2. \quad (29)$$

Решение этого уравнения является частным случаем ранее рассмотренных в п. 1 и п. 2 при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, и все рассуждения, сделанные выше, остаются в силе.

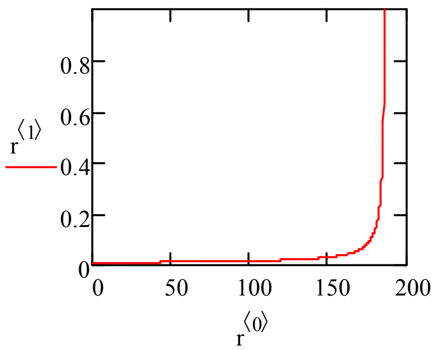

***Рис. 3.* Зависимость концентрации "приемников", принимающих информацию как полезную, в соответствии с (29) для $\xi_1 = 1; \xi_3 = 40; n(0) = 0{,}01$. Оси $n = r^{<1>}$; $\tau = r^{<0>}$**

На рис. 3 приведен график, полученный в результате численного расчета в Mathcad 14 уравнения (29), подтверждающий выводы о форме зависимости $n(\tau)$. Полученное значение критического времени $\tau_{кр} = 187$ и оказывается близким к полученному в предыдущем случае.

Сравнение полученных результатов для используемых функциональных зависимостей интенсивности источника информации, обладающего субъективной полезностью, показывает, что в общем случае можно реализовать ситуацию, когда достигается минимальное критическое время, определенное условием $n(\tau_{кр}) = 1$. Эта ситуация соответствует случаю нарастающей интенсивности источника субъективной полезности пропорционально ее амплитуде. Для источников обычных благ эта ситуация противоречит закону об убывающей предельной полезности благ. Вместе с тем в теоретическом плане для такого нематериального блага как информация подобный закон зависимости предполагается допустимым[3].

4. *Случай постоянной полезности информации во времени* в соответствии с (8). В этой ситуации субъективную полезность информации определим не в вероятностных, а в детерминированных параметрах процесса. Для дальнейшего описания используем функцию плотности вероятности вида

$$f(x) = a \cdot \delta(x), \quad (30)$$

где $\delta(x)$ - дельта - функция Дирака.

Для составляющей - субъективной вероятности, соответственно, имеем:

$$P_2(N) = a \int_0^N \delta(z) dz = a \text{ при } N > 0. \quad (31)$$

С учетом (31), используя (4), получим уравнение роста численности аудитории "приемников"

$$\frac{dn}{d\tau} = (1 - \exp(-\xi_1 \tau)) \cdot n^2. \quad (32)$$

Решение этого уравнения:

$$n(\tau) = \frac{n(0)}{1 - n(0) \cdot a \cdot \left\{ \tau - \frac{1}{\xi_1} [1 - \exp(-\xi_1 \tau)] \right\}}. \quad (33)$$

Из полученного решения можно сделать следующие выводы:

а) при $a = 0$, т.е. если информация имеет нулевую субъективную полезность, численность "приемников" во времени остается неизменной $n(\tau) = n(0)$;

[3] *Шиляев А.А.* Информационное обеспечение реструктуризации системы управления предприятием: Дис. ... канд. экон. наук. М., 2005.

б) в общем случае критическое время в (33) находим из условия $n(\tau_{кр}) = 1$:

$$\tau_{кр} - \frac{1}{\xi_1}\left(1 - \exp(-\xi_1 \tau_{кр}\right) = \frac{1 - \mathrm{n}(0)}{\mathrm{a} \cdot \mathrm{n}(0)}. \quad (34)$$

Умножив обе части уравнения (34) на ξ_1 для случая

$$\xi_1 \tau_{кр} >> 1, \quad (35)$$

находим приближенное решение:

$$\tau_{кр} = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1 - n(0)}{a \cdot n(0)}. \quad (36)$$

Из (35),(36) при $n(0) << 1; \xi_1 >> 1$ получим новое приближенное решение:

$$\tau_{кр} \approx \frac{1}{\mathrm{a} \cdot \mathrm{n}(0)}. \quad (37)$$

При этом предельный случай: при $a = 1$ решение (37) переводит в (28).

В противоположном случае, т.е. $\xi_1 \tau_{кр} << 1$, ограничиваясь первыми тремя членами в разложении экспоненты в (37) в ряд Тейлора, находим критическое время $\tau_{кр}$:

$$\tau_{кр} = \sqrt{\frac{2(1 - n(0))}{a \cdot \xi_1 \cdot n(0)}}. \quad (38)$$

Рассмотрим теперь источник объективно полезной информации. Влиянием объективного фактора пренебрегаем при условии:

$$\xi_1 \tau >> 1. \quad (39)$$

Учитывая диапазон изменения $\tau \le \tau_{кр}$, заменим в (42) τ на $\tau_{кр}$, что дает новое условие:

$$\xi_1 \tau_{кр} >> 1. \quad (40)$$

Для каждого из рассмотренных вариантов поведения источника субъективно полезной информации, подставляя в (40) полученные выше значения $\tau_{кр}$, можем получить ограничения на основные параметры, входящие в исходное дифференциальное уравнение для роста численности “приемников”.

Так, для случая спада интенсивности источника субъективной полезности по гиперболической зависимости, подставляя $\tau_{кр}$ из (23), а также используя ранее введенные обозначения для $\xi_1 = \mu_1/\gamma$ и $\xi_2 = \mu_2/\lambda(1 + \alpha_1)$, представим условие (40) в виде

$$\frac{\mu_1 \cdot \lambda}{\mu_2 \cdot \gamma \cdot \mathrm{n}(0)^{(2+\alpha_1)}} >> 1. \quad (41)$$

В итоге получаем в виде (41) соотношение, связывающее вместе все показатели, определяющие:

- эффективное время существования объективно полезной информации ~ $1/\mu_1$;
- эффективное время существования субъективно полезной информации ~ $1/\mu_2$;
- начальный уровень численности “приемников” в аудитории, априори воспринимающих информацию как полезную $n(0) = N_0/N(0)$;
- скорость передачи полезной информации из внешней среды (объективная полезность) во внутреннюю (субъективная полезность) $\gamma \sim \mathrm{dn}/\mathrm{d}\tau$;
- эффективность интенсивности источника субъективной полезности λ.

Полученные результаты, в целом, показывают, что закон убывающей предельной полезности создает наиболее неблагоприятные условия для распространения информации из рассмотренных функциональных зависимостей скорости изменения полезности от величины информации.

Заключение

1. В работе предложена модель распространения информации в аудитории с учетом как объективной оценки полезности, так и субъективной оценки полезности информации каждым ее принимающим индивидом, позволяющая оценить эффективность продвижения информационного продукта на рынке.

2. Объективная составляющая информации предполагается равномерно распределенной по всей аудитории. Старение плотности вероятности объективной компоненты полезности информации предполагается подчиняющимся экспоненциальной зависимости.

3. Анализ показывает, что наименьшее время охвата всей аудитории информацией, которая признается как полезная в объективном, так и в субъективном понимании одновременно, может быть достигнуто в случае нарастания интенсивности источника субъективной полезности пропорционально полученному объему генерируемой информации. Эта модель, как обеспечивающая наиболее эффективное распространение информации в аудитории, нуждается, прежде всего, в практическом подтверждении со стороны психологии (внутреннее восприятие индивидом информации) и социологии (взаимодействие индивидов в аудитории). В соответствии с данной моделью распространение информации может ускоряться многократно по сравнению с ординарной зависимостью - убывающей предельной полезностью экономического блага. Этот результат дает возможность по-новому подойти к проблеме формирования маркетинговой стратегии продвижения на рынке информационного продукта.

Поступила в редакцию 04.12.2008 г.