

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПЛАНА ПО ВЫПУСКУ ГОТОВОЙ ПРОДУКЦИИ НА ПРЕДПРИЯТИИ

© 2019 **Суменков Михаил Сергеевич**

доктор экономических наук, профессор  
Уральский государственный юридический университет  
620137, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 21

© 2019 **Суменков Сергей Михайлович**

кандидат экономических наук, доцент, кафедра предпринимательского права  
Уральский государственный юридический университет  
620137, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 21

© 2019 **Наталья Юрьевна Новикова**

старший преподаватель, кафедра финансовых рынков и банковского дела  
Уральский государственный экономический университет  
620144, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта/Народной Воли, 62/45

Статья завершает цикл публикаций, посвященных разработке методологии оптимизации экономического плана предприятия по выпуску готовой продукции, включающей экономико-математическую модель прямой и двойственной задачи, информационное обеспечение, реализацию для действующего предприятия, а также экономико-математический анализ оптимального решения при различных вариантах функционирования предприятия.

*Ключевые слова:* экономико-математическая модель, оптимизация, экономико-математический анализ, двойственная задача, устойчивость плана, оптимальное решение.

Методология оптимизации экономического плана предприятия по выпуску готовой продукции представлена в работе [1].

Оптимальное решение при минимальных, прогнозных и максимальных значениях переменных экономико-математической модели приведено, соответственно, в табл. 2,3,4 в статье [2]. Анализ устойчивости оптимальных пла-

нов по рассматриваемым вариантам приведен в табл. 1,2,3.

Анализ оптимального решения задач показывает, что его структура для всех трех вариантов совпадает. В связи с этим рассмотрим более подробно анализ решения только для варианта «Прогнозный» (для двух других вариантов он будет аналогичный).

*Таблица 1. Анализ устойчивости оптимального плана по варианту «минимум»*

Переменные	Оптимальный план выпуска продукции	Двойственная оценка ограничения продукции по объему	Целевой коэффициент (цены)	Допустимое увеличение цены	Допустимое уменьшение цены
X	1400554,7	0	-5,49778	1,76977581	0,158887794
У <sub>1</sub>	136300	0,72344444	6,23222	1E+30	0,72344444
У <sub>2</sub>	427900	4,36234726	8,39222	1E+30	4,36234726
У <sub>3</sub>	154700	4,2117957	9,35222	1E+30	4,2117957
У <sub>4</sub>	178700	6,44035614	10,49222	1E+30	6,44035614
У <sub>5</sub>	33200	13,43635514	16,96222	1E+30	13,43635514
У <sub>6</sub>	94300	0,93934464	33,44222	1E+30	0,93934464
У <sub>7</sub>	30600	7,78035614	11,83222	1E+30	7,78035614
У <sub>8</sub>	23100	29,53841036	42,39222	1E+30	29,53841036
У <sub>9</sub>	0	-38,14043849	80,342218	38,14043849	1E+30
У <sub>10</sub>	10300	79,887331	80,16222	1E+30	79,887331

**Ограничения**

Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
Ограничение 1	0,000000000	5,497780000	0	1400554,7	121045,3
Ограничение 2	-49337,8	0	0	1E+30	49337,8

Таблица 2. Анализ устойчивости оптимального плана по варианту «прогнозный»

Переменные	Оптимальный план выпуска продукции	Двойственная оценка ограничения продукции по объему	Целевой коэффициент (цены)	Допустимое увеличение цены	Допустимое уменьшение цены
X	1459622,7	0	-5,67778	1,794332105	0,21569429
У <sub>1</sub>	142000	0,80308444	6,49222	1E+30	0,80308444
У <sub>2</sub>	445800	4,59040726	8,75222	1E+30	4,59040726
У <sub>3</sub>	161200	4,4334957	9,74222	1E+30	4,4334957
У <sub>4</sub>	186200	6,74769614	10,93222	1E+30	6,74769614
У <sub>5</sub>	34600	6,77269514	13,51222	1E+30	6,77269514
У <sub>6</sub>	98300	1,27518464	34,84222	1E+30	1,27518464
У <sub>7</sub>	31900	8,34769614	12,53222	1E+30	8,34769614
У <sub>8</sub>	24100	31,03757036	44,31222	1E+30	31,03757036
У <sub>9</sub>	0	-38,66965119	83,69218558	38,66965119	1E+30
У <sub>10</sub>	10800	83,228331	83,51222	1E+30	83,228331

## Ограничения

Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
Ограничение 1	0,000000000	5,677780000	0	1459622,7	161577,3
Ограничение 2	-50877,1	0	0	1E+30	50877,1

Таблица 3. Анализ устойчивости оптимального плана по варианту «максимум»

Переменные	Оптимальный план выпуска продукции	Двойственная оценка ограничения продукции по объему	Целевой коэффициент (цены)	Допустимое увеличение цены	Допустимое уменьшение цены
1	2	3	4	5	6
X	1517327,6	0	-5,91778	1,879350798	0,21080931
У <sub>1</sub>	147600	0,82260444	6,75222	1E+30	0,82260444
У <sub>2</sub>	463600	4,76448726	9,10222	1E+30	4,76448726
У <sub>3</sub>	167600	4,5990957	10,13222	1E+30	4,5990957
У <sub>4</sub>	193600	7,00081614	11,36222	1E+30	7,00081614
У <sub>5</sub>	35900	7,02781514	14,05222	1E+30	7,02781514
У <sub>6</sub>	102200	1,24630464	36,23222	1E+30	1,24630464
У <sub>7</sub>	33100	8,46081614	12,82222	1E+30	8,46081614
У <sub>8</sub>	25000	32,24645036	46,08222	1E+30	32,24645036
У <sub>9</sub>	0	-40,50188904	87,03218773	40,50188904	1E+30
У <sub>10</sub>	11200	86,556331	86,85222	1E+30	86,556331

## Ограничения

Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
1	2	3	4	5	6
Ограничение 1	0,000000000	5,917780000	0	1517327,6	196472,4
Ограничение 2	-53421,2	0	0	1E+30	53421,4

**Анализ оптимального решения задачи при варианте «Прогнозный»**

Общая постановка задачи свелась к виду:

найти

$$\max\{6,50y_1 + 8,76y_2 + 9,75y_3 + 10,94y_4 + 13,52y_5 + 34,85y_6 + 12,54y_7 + 44,32y_8 + 83,70y_9 + 83,52y_{10} - 5,67x\} \quad (1.1)$$

при ограничениях

$$0 \leq x \leq 1621200, \quad (1.2)$$

$$0 \leq y_1 \leq 142000, \quad (1.3)$$

$$0 \leq y_2 \leq 445800, \quad (1.4)$$

$$0 \leq y_3 \leq 161200, \quad (1.5)$$

$$0 \leq y_4 \leq 168200, \quad (1.6)$$

$$0 \leq y_5 \leq 34600, \quad (1.7)$$

$$0 \leq y_6 \leq 98300, \quad (1.8)$$

$$0 \leq y_7 \leq 31900, \quad (1.9)$$

$$0 \leq y_8 \leq 24100, \quad (1.10)$$

$$0 \leq y_9 \leq 3900, \quad (1.11)$$

$$0 \leq y_{10} \leq 10800, \quad (1.12)$$

$$1,002y_1 + 0,733y_2 + 0,935y_3 + 0,737y_4 + 1,187y_5 + 5,912y_6 + 0,737y_7 + 2,338y_8 + 21,551y_9 + 0,05y_{10} - x \leq 0 \quad (1.13)$$

— ограничение по расходу сырого молока,

$$0 \times y_1 + 0,279y_2 + 0,282y_3 + 0 \times y_5 - 4,8y_6 + 0,282y_7 + 5,285y_8 - 20,44y_9 + 8,63y_{10} + 0x \leq 0 \quad (1.14)$$

— ограничение по расходу и производству обрат.

Экономико-математический анализ решения показывает:

1. Производство всех видов продуктов, кроме масла, вышло на максимальные объемы. Объем производства масла равен 0, т.е. масло можно вообще не производить. Потребность в сыром молоке равна 1459622,7 кг и не достигает верхней допустимой границы 1621200 на величину остатка в объеме 161577,3 кг. Хотя при производстве масла получается обрат, но его отсутствие в оптимальном решении показывает, что обрат, получаемого при производстве сметаны, достаточно, чтобы удовлетворить всю потребность в обрате, необходимую для производства других продуктов.

2. Первое технологическое ограничение (1.13) по расходу сырого молока выполняется как равенство (в таблице отчета по устойчивости в разделе ограничения его результирующее значение равно нулю). Этого и следовало ожидать, так как между расходом сырого молока и объемом его закупки должен соблюдаться баланс. Двойственная оценка (в таблице это теневая цена) данного ограничения равна 5,67 руб. Это говорит о том, что если правую часть ограничения (1.2) увеличить на 1 ед. (1 кг), то значение целевой функции увеличится на 5,67 руб., т.е. будет получена дополнительная прибыль в 5,67 руб. Действительно, увеличение правой части на 1 ед. (1кг) означает, что на 1кг сырого молока закупается меньше, что приводит к увеличению прибыли на 5,67 руб., т.е. на столько, сколько стоит закупка 1 кг. сырого молока.

Второе технологическое ограничение (1.14), связанное с балансом расхода и производства обрата, имеет в таблице ограничений результирующее значение, равное — 50877,1. Это означает, что данное ограничение выполняется как строгое неравенство, что в процессе производства сметаны обрата производная на 50877,1 кг больше, чем его необходимо для производства всего объема других продуктов. В связи с тем, что ограничение выполняется как строгое неравенство, то его двойственная оценка (в таблице это теневая оценка) равна нулю, т.е. привлечение дополнительного объема обрата не увеличивает объем прибыли.

В таблице ограничений для первого ограничения допустимое увеличение равно 1459622,7. Это означает, что если увеличить правую часть ограничения (1,2) на 1459622,7 (т.е. привлечь дополнительно 1459622,7 кг сырого молока), то

это не изменит структуру оптимального производства продуктов. Величина 1 459 622,7 кг равна объему закупки сырого молока ( $x - 1459622,7$ ).

Допустимое уменьшение для первого ограничения, равное 161577,3, как нетрудно видеть, является разностью между максимально возможным объемом 1621200 кг. закупки сырого молока и его необходимой потребностью  $x - 1459622,7$ .

Поэтому, действительно, если правую часть ограничения (1.2) уменьшить на эту разность, равную 161577,3, то структура оптимального решения не изменится.

Аналогично, допустимое увеличение для второго ограничения (1.14) условно равно  $+\infty$ . Действительно, обрата производится в избытке, поэтому, если привлечь дополнительно еще какое-то его количество, то это не приведет к изменению оптимального решения.

Допустимое уменьшение для второго ограничения составляет 50877,1. Как нетрудно видеть, эта величина равна количеству обрата, производимому сверх необходимой потребности. Поэтому, если обрат в объеме, не превышающем 50877,1 кг, продать «на сторону», то это не приведет к изменению структуры оптимального решения.

3. Рассмотрим теперь анализ двойственных оценок для правых частей ограничений (1.1)-(1.14), которые в таблице отчета по устойчивости приведены в столбце «двойственная оценка ограничения продукции по объему».

Для правой части ограничения (1.2) для переменной  $x$  двойственная оценка равна нулю. Это означает, что увеличение или уменьшение правой части этого ограничения на 1 ед. (1 кг) не приведет к изменению величины прибыли. Действительно, объем использованного сырого молока составляет  $x - 1459622,7$  кг. Это ниже возможного объема закупки, равного 1621200, т.е. сырое молоко используется не полностью, оно «в избытке». Поэтому привлечение дополнительно 1 кг сырого молока или его изъятие (из 1621200) не изменит значения целевой функции, а, следовательно, величину получаемой прибыли.

Для правой части ограничения (1.3) для переменной  $y_1$ , соответствующей объему производства товарного молока, двойственная оценка равна 0,80 руб. Действительно, нетрудно видеть, что 0,80 руб. равняется прибыли, получаемой от реализации 1 кг. товарного молока, которая составляет  $6,50 - 5,67 \times 1,002 = 0,82$  руб. (примерно

0,80 руб. в пределах точности счета).

Аналогичную интерпретацию получают двойственные оценки и для других переменных  $У_2, У_3, У_4, У_5, У_6, У_7, У_8, У_{10}$ .

Рассмотрим еще двойственную оценку первой части ограничения (1.11) для переменной  $у_9$ , соответствующей объему производимого масла. Здесь двойственная оценка равна — 38,67 (руб.). Это означает, что производство 1 кг масла ведет к убытку, равному 38,67 руб. Действительно, прибыль от производства 1 кг. масла равна  $83,70 - 5,67 \times 21,551 = -38,50$  ( $\approx 38,67$  в пределах точности счета), т.е. производство масла убыточно. Поэтому она вошла в оптимальный план со значением  $у_9 = 0$ , т.е. масло можно не производить.

Масло, возможно, производилось бы, если бы не производилась сметана, поскольку оно служило бы источником для производства.

4. Анализ допустимого изменения коэффициентов целевой функции, не приводящих к изменению структуры оптимального решения. Наибольшее и наименьшее изменения этих коэффициентов приводятся в таблице отчета устойчивости в столбцах «допустимое увеличение» и «допустимое уменьшение».

Так, для коэффициента целевой функции при переменной  $x$ , равной 5,67 (руб.) — цена закупки сырого молока — возможный диапазон изменения цены составит  $3,876 \div 5,886$  руб./кг. При этом при цене закупки 5,886 руб./кг. в зону убыточности попадает сметана, а при дальнейшем увеличении ее производства это приведет сначала к снижению объема производства дру-

гих продуктов, использующих при своей обработке обрат. При закупочной цене сырого молока по 3,876 руб./кг. в число прибыльных попадает также масло. Если цена даже снижается, то масло из продукта нулевой прибыльности переходит в продукт положительной прибыльности.

Для коэффициента целевой функции при  $у_1$ , равном 6,50 руб./кг. — цене реализации товарного молока — возможный диапазон изменения этой цены составит  $5,697 - (+ \infty)$  руб./кг. При цене 5,697 руб./кг. товарное молоко становится продуктом нулевой прибыльности, и поэтому переход цены реализации вниз за этот предел приведет к выводу товарного молока из числа производимых продуктов. В то время как рост цены реализации оставляет товарное молоко продуктом положительной прибыльности, его производство сохраняется в структуре оптимального плана на верхней границе 142 000 кг.

Аналогично, возможные диапазоны изменения цен реализации (коэффициенты целевой функции) получаются по другим переменным  $у_1, У_2, У_3, У_4, У_5, У_6, У_7, У_8, У_{10}$ .

Рассмотрим диапазон изменения цены реализации масла. Он будет равен 0-122,37 руб./кг. — верхней границе диапазона — масло становится продуктом нулевой прибыльности, и поэтому дальнейший рост этой цены изменяет структуру решения задачи, а именно, масло входит в число производимых продуктов. При цене ниже 122,37 руб./кг. масло остается убыточным продуктом и ведет к уменьшению величины получаемой прибыли.

### Библиографический список

1. Суменков М. С., Суменков С. М., Новикова Н. Ю. Методология моделирования процессов планирования и управления экономикой предприятия // Экономические науки. 2017. № 9. с. 42–49.
2. Суменков М. С., Суменков С. М., Новикова Н. Ю. Реализация методики принятия решений при оптимизации выпуска готовой продукции на предприятии. «Экономические науки. 2018. № 4. С. 30–35.
3. Эддоус М., Стенофилд Р. Методы принятия решений: монография Москва. 1997. 176 с.

Поступила в редакцию 15.02.2019