Аналитическое исследование проблемы планирования производственной деятельности в проектах освоения новой продукции*

© 2017 Павлов Олег Валерьевич
кандидат технических наук, доцент,
заместитель директора института экономики и управления
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева
443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34
E-mail: pavlov@ssau.ru

Сформулированы и решены в аналитическом виде динамические задачи планирования производства в проектах освоения новой продукции на промышленном предприятии. В процессе освоения новой продукции проявляется эффект кривой обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижаются. Эффект кривой обучения приводит к динамическому изменению экономических показателей производства. Задача динамического планирования состоит в выборе руководством предприятия объемов производства продукции при заданных временных, производственных и финансовых ограничениях. Рассматриваются задачи планирования производства для различных моделей кривых обучения. Динамика изменения производственной системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Проблема динамического планирования математически формализуется как задача оптимального управления процессом в непрерывном времени. Получены аналитические решения задач с помощью принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: модели кривых обучения, динамические задачи планирования.

Введение

В проектах по освоению новой продукции на промышленных предприятиях наблюдается эффект кривой обучения. Этот эффект заключается в том, что затраты времени рабочих на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижаются. Эффект кривой обучения был открыт инженером Т. Райтом в авиастроительной отрасли США[1]. Было замечено, что при удвоении кумулятивного объема производства самолетов затраты времени рабочих на сборку каждого самолета уменьшаются на 15-20 %. Райт предложил описывать уменьшение трудоемкости с увеличением кумулятивного объема производства самолетов степенной моделью. Обзоры и сравнение моделей кривых обучения для различных отраслей представлены в научной литературе[2]. Наиболее часто встречающимися моделями кривых обучения являются степенная, экспоненциальная и логистическая.

Снижение удельных затрат при увеличении кумулятивного объема производства делает актуальными постановки задач динамической оптимизации. Задачи заключаются в поиске оптимальных объемов производства в каждый момент времени при заданных временных, производственных и финансовых ограничениях с целью достижения экстремума выбранного экономического критерия. Постановки и численные решения динамических оптимизационных задач обучения в процессе работы приводятся в[3]. В статьях[4] сформулированы и численно решены задачи планирования объемов производства на промышленном предприятии в дискретном времени. Численные решения получены с применением метода динамического программирования Беллмана. Для поиска аналитических решений актуальным является рассмотрение задач динамической оптимизации производственной деятельности с непрерывным временем. Аналитическое решение задачи динамического планирования производства для степенной модели кривой обучения приведено автором в[5].

1. Постановка задачи планирования производства

Динамика производственной деятельности предприятия описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Самарской области в рамках научного проекта № 17-46-630606.

$$\frac{dx}{dt} = u(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ - кумулятивный объем производства в момент времени t;
$u(t)$ - объем производства в момент времени t. Выбор объема производства $u(t)$ является управлением менеджмента предприятия.

Проект освоения новой продукции на промышленном предприятии рассматривается на фиксированном интервале времени:

$$0 \le t \le T,$$

где T - горизонт планирования проекта.

В начальный момент времени известно количество изделий, уже произведенное предприятием к этому моменту:

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Произведенное количество продукции x_0 до начального момента времени характеризует накопленный опыт предприятия по освоению новой продукции до начала реализации проекта.

В конечный момент времени кумулятивный объем произведенной продукции должен быть равен заданному:

$$x(T) = x_0 + R, \quad (3)$$

где R - заданное количество продукции.

На объем производства наложены следующие ограничения:

$$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t). \quad (4)$$

Затраты на производство изделия $C(t)$ определяются как произведение удельных затрат $c(t)$ и объема производства $u(t)$:

$$C(t) = c(x(t))u(t). \quad (5)$$

Динамика изменения удельных затрат на производство продукции от кумулятивного объема производства описывается различными моделями кривой обучения. Наиболее типичными моделями являются степенная, экспоненциальная и логистическая, представленные в научной литературе[6].

Степенная модель кривой обучения имеет следующий вид:

$$c(x(t)) = ax(t)^{-b}, \quad (6)$$

где a - затраты на производство первого изделия;
b - индекс обучения.

Индекс обучения характеризует темп снижения удельных затрат продукции при увеличении кумулятивного объема производства.

Экспоненциальная модель кривой обучения:

$$c(x(t)) = k + \beta e^{-\alpha x(t)}, \quad (7)$$

где α - индекс обучения;
k, β - параметры экспоненциальной модели.

Логистическая модель:

$$c(x(t)) = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min})\left[\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x(t)}}\right], \quad (8)$$

где $c_{\min}$, $c_{\max}$ - минимальные и максимальные значения удельных затрат на производство изделия;
α - индекс обучения;
β - параметр логистической модели.

Критерием принятия управленческого решения является минимизация кумулятивных затрат на производство продукции:

$$J = \int_0^T C(t)dt = \int_0^T c(x(t))u(t)dt \to \min. \quad (9)$$

Задача заключается в поиске оптимальных объемов производства $u(t)^{opt}$, удовлетворяющих ограничению (4), осуществляющих перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизирующих кумулятивные затраты (9).

2. Аналитическое решение задачи планирования производства

Для решения сформулированной задачи оптимального управления с непрерывным временем применим принцип максимума Понтрягина[7]. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина к сформулированной задаче оптимального управления (1)-(4), (6)-(9) невозможно, поскольку в этом случае существует особое управление[8].

Так как функция натурального логарифма - монотонная функция, а кумулятивный объем производства $x(t)$ и объемы производства $u(t)$ являются положительными числами, то минимизация кумулятивных затрат (9) будет эквивалентна минимизации натурального логарифма кумулятивных затрат:

$$J = \int_0^T \ln[c(x(t))u(t)]dt \to \min. \quad (10)$$

Для решения эквивалентной задачи (1)-(4), (6)-(9), (10) запишем функцию Гамильтона:

$$H(t,x,\psi,u) = \psi(t)u(t) - \ln[c(x(t))] - \ln[u(t)], \quad (11)$$

где $\psi(t)$ - вспомогательная переменная.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. Найдем максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (12)$$

Из условия (12) найдем оптимальное управление

$$u(t)^{opt}=\frac{1}{\psi}. \quad (13)$$

Составим систему сопряженных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\psi}\\ \dfrac{d\psi}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=\dfrac{\partial \ln[c(x(t))]}{\partial x}\end{cases}. \quad (14)$$

Решение сопряженной системы (14) определяется конкретным видом модели кривой обучения (6)-(8).

2.1. Решение задачи для степенной модели кривой обучения

Для степенной модели кривой обучения (6) сопряженная система уравнений (14) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\psi}\\ \dfrac{d\psi}{dt}=-\dfrac{b}{x}\end{cases}.$$

Из уравнений системы следует:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\psi}\Rightarrow dt=\psi dx;\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{b}{x}\Rightarrow dt=-\frac{x}{b}d\psi. \quad (15)$$

Отсюда симметрическая форма системы:

$$dt=\psi dx=-\frac{x}{b}d\psi. \quad (16)$$

Разделим (16) на $x\psi$, получим

$$\frac{dt}{x\psi}=\frac{dx}{x}=-\frac{1}{b}\frac{d\psi}{\psi}. \quad (17)$$

Второе равенство из (17) является интегрируемым уравнением. Его общее решение имеет следующий вид:

$$\psi=C_1x^{-b}, \quad (18)$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Подставим полученное решение (18) в первое равенство (16):

$$dt=C_1x^{-b}dx. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19), получим

$$t=C_1\frac{x^{1-b}}{1-b}-C_2. \quad (20)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (2) и (3):

$$C_1=\frac{(1-b)}{(R+x_0)^{1-b}-x_0^{1-b}}T;$$

$$C_2=\frac{x_0^{1-b}}{(R+x_0)^{1-b}-x_0^{1-b}}T. \quad (21)$$

Подставляя постоянные интегрирования (21) в уравнение (20), найдем уравнение оптимальной траектории кумулятивного объема производства:

$$x(t)^{opt}=\sqrt[1-b]{x_0^{1-b}+\frac{t}{T}\left((R+x_0)^{1-b}-x_0^{1-b}\right)}. \quad (22)$$

Определим оптимальное управление, подставив выражение (18) в (13) с учетом постоянной интегрирования C_1 (21):

$$u(t)^{opt}=\sqrt[1-b]{x_0^{1-b}+\frac{t}{T}\left((R+x_0)^{1-b}-x_0^{1-b}\right)}^{\,b}\,\frac{(R+x_0)^{1-b}-x_0^{1-b}}{(1-b)T}. \quad (23)$$

Найдем затраты на производство изделия (5) с учетом (22) и (23) в каждый момент времени на оптимальной траектории при оптимальном управлении:

$$C(x^{opt},u^{opt})=a\frac{(R+x_0)^{1-b}-x_0^{1-b}}{(1-b)T}. \quad (24)$$

Анализируя (24), приходим к выводу, что при оптимальном управлении на всей траектории затраты на производство изделия постоянны.

2.2. Решение задачи для экспоненциальной модели кривой обучения

Преобразуем экспоненциальную модель кривой обучения (7) в следующий вид:

$$y(x(t))=c(x(t))-k=\beta e^{-\alpha x(t)}.$$

Эквивалентный критерий запишется

$$J=\int_0^T \ln[y(x(t))u(t)]dt\rightarrow\min.$$

Сопряженная система уравнений (14) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\psi}\\ \dfrac{d\psi}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=\dfrac{\partial \ln[y(x(t))]}{\partial x}=-\alpha\end{cases}.$$

Из уравнений системы следует:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\psi}\Rightarrow dt=\psi dx;\quad \frac{d\psi}{dt}=-\alpha\Rightarrow dt=-\frac{1}{\alpha}d\psi. \quad (25)$$

Отсюда симметрическая форма системы

$$dt=\psi dx=-\frac{1}{\alpha}d\psi.$$

Разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение

$$dx = -\frac{1}{\alpha}\frac{d\psi}{\psi}.$$

Общее решение уравнения имеет следующий вид:

$$\psi = C_1 e^{-\alpha x}, \qquad (26)$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Подставим полученное решение (26) в первое равенство (25):

$$dt = C_1 e^{-\alpha x} dx.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение, получим

$$\mathrm{t} = -\frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha x} + C_2. \qquad (27)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (2) и (3):

$$C_1 = \frac{\alpha T}{e^{-\alpha x_0} - e^{-\alpha(x_0+R)}};\; C_2 = \frac{e^{-\alpha x_0}}{e^{-\alpha x_0} - e^{-\alpha(x_0+R)}} T. \qquad (28)$$

Подставляя постоянные интегрирования (28) в уравнение (27), найдем уравнение оптимальной траектории кумулятивного объема производства:

$$x(t)^{opt} = \ln\left\{\left[e^{-\alpha x_0} - (e^{-\alpha x_0} - e^{-\alpha(x_0+R)})\frac{t}{T}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}. \qquad (29)$$

Определим оптимальное управление:

$$u(t)^{opt} = \frac{1}{\alpha T}\frac{e^{-\alpha x_0} - e^{-\alpha(x_0+R)}}{e^{-\alpha x(t)^{opt}}}. \qquad (30)$$

Найдем затраты на производство изделия (5) с учетом (29) и (30) в каждый момент времени на оптимальной траектории при оптимальном управлении:

$$C(x^{opt}, u^{opt}) = \beta\frac{e^{-\alpha x_0} - e^{-\alpha(x_0+R)}}{\alpha T}. \qquad (31)$$

Анализируя (31), приходим к выводу, что при оптимальном управлении на всей траектории затраты на производство изделия постоянны.

2.3. Решение задачи для логистической модели кривой обучения

Преобразуем логистическую модель кривой обучения (8) в безразмерный вид:

$$y(x(t)) = \frac{c(x(t)) - c_{\min}}{(c_{\max} - c_{\min})} = \frac{1}{1+\beta e^{\alpha x(t)}}.$$

Эквивалентный критерий запишется:

$$J = \int_0^T \ln[y(x(t))u(t)]dt \to \min.$$

Сопряженная система уравнений (14) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\psi} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial \ln[y(x(t))]}{\partial x} = -\dfrac{\alpha\beta e^{\alpha x}}{1+\beta e^{\alpha x}} \end{cases}.$$

Из уравнений системы следует:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\psi} \Rightarrow d\mathrm{t} = \psi dx;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\alpha\beta e^{\alpha x}}{1+\beta e^{\alpha x}} \Rightarrow dt = -\frac{\alpha\beta e^{\alpha x}}{1+\beta e^{\alpha x}} d\psi. \qquad (32)$$

Отсюда симметрическая форма системы

$$d\mathrm{t} = \psi dx = -\frac{\alpha\beta e^{\alpha x}}{1+\beta e^{\alpha x}} d\psi.$$

Разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{\alpha\beta e^{\alpha x}}{1+\beta e^{\alpha x}}\frac{1}{\alpha} dx.$$

Общее решение уравнения имеет следующий вид:

$$\psi = \frac{1}{C_1}\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x}}, \qquad (33)$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Подставим полученное решение (33) в первое равенство (32):

$$dt = \frac{1}{C_1}\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x}} dx.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение, получим

$$\mathrm{t} = -\frac{1}{\alpha C_1}\ln(1+\beta e^{-\alpha x}) + C_2. \qquad (34)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (2) и (3):

$$C_1 = \frac{1}{\alpha T}\ln\left\{\frac{1+\beta e^{-\alpha x_0}}{1+\beta e^{-\alpha(x_0+R)}}\right\};\; C_2 = \frac{\ln(1+\beta e^{-\alpha x_0})}{\alpha C_1}. \qquad (35)$$

Подставляя постоянные интегрирования (35) в уравнение (34), найдем уравнение оптимальной траектории кумулятивного объема производства:

$$x(t)^{opt}=-\frac{1}{\alpha}\ln\left\{\frac{1}{\beta}\left(\left[1+\beta e^{-\alpha(x_0+R)}\right]^{\frac{t}{T}}\left[1+\beta e^{-\alpha x_0}\right]^{\frac{T-t}{T}}-1\right)\right\}. \quad (36)$$

Определим оптимальное управление:

$$u(t)^{opt}=\frac{1}{\alpha T}\ln\left\{\frac{1+\beta e^{-\alpha x_0}}{1+\beta e^{-\alpha(x_0+R)}}\right\}(1+\beta e^{\alpha x(t)^{opt}}). \quad (37)$$

Найдем затраты на производство изделия (5) с учетом (36) и (37):

$$C(x^{opt},u^{opt})=\frac{1}{\alpha T}\ln\left\{\frac{1+\beta e^{-\alpha x_0}}{1+\beta e^{-\alpha(x_0+R)}}\right\}. \quad (38)$$

Из анализа (38) приходим к выводу, что при оптимальном управлении на всей траектории затраты на производство изделия постоянны.

3. Исследование влияния индекса обучения на оптимальные планы производства

На примере предприятия АО “Салют” проведено исследование зависимости оптимальной траектории кумулятивного объема производства от индекса обучения. По данным предприятия построены регрессионные модели трудоемкости новых изделий:

“Кассета” - $c(x)=42{,}64x^{-0{,}29}$,

“Отсек” - $c(x)=55{,}10+36{,}61\left[\frac{1}{1+0{,}017e^{0{,}0561x}}\right]$,

“Балка” - $c(x)=9{,}17+6{,}16e^{-0{,}0169x}$.

Для исследования использовались следующие данные: заданный кумулятивный объем производства изделий R=240 шт., количество временных периодов T=12 месяцев, объем произведенной продукции в начальный период $x_0=1$ шт.

Влияние индекса обучения на оптимальные траектории кумулятивного объема производства для различных моделей кривой обучения представлено на рис. 1-3.

Заключение

В работе сформулирована задача минимизации кумулятивных затрат предприятия в непрерывном времени с учетом эффекта кривой обучения. Рассмотрены три модели кривой обучения: степенная, экспоненциальная и логистичес-

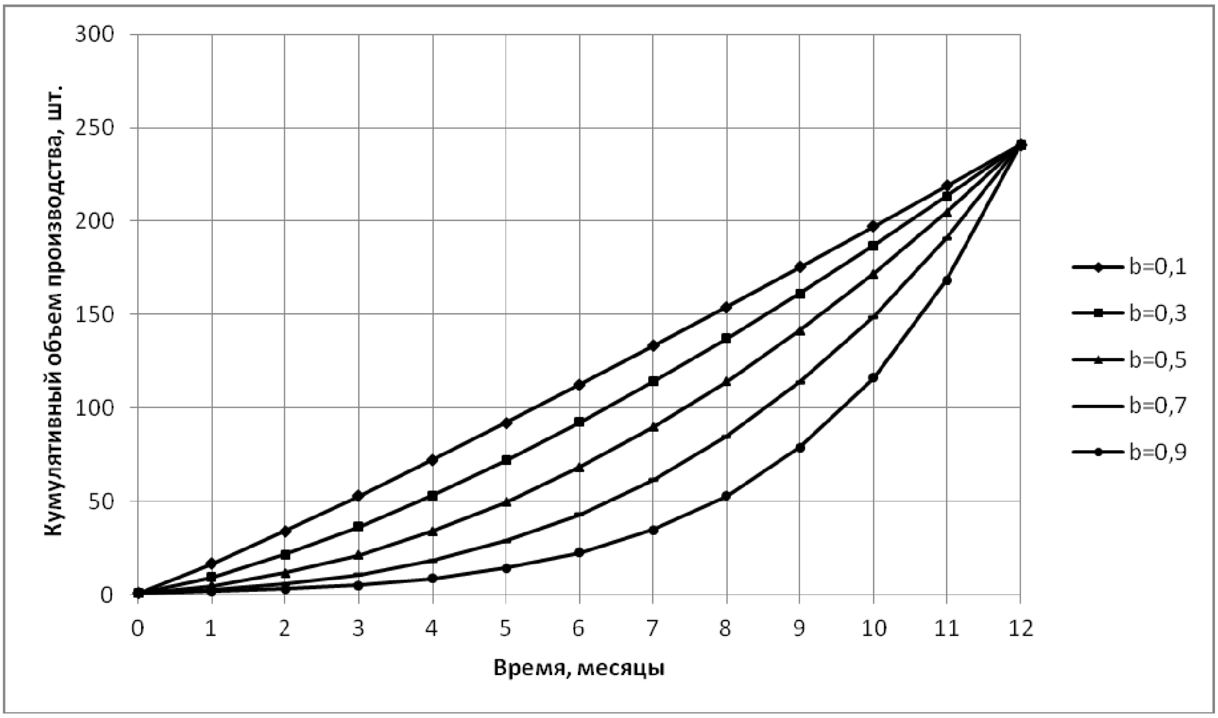

Рис. 1. **Графики оптимальных траекторий кумулятивного объема производства для степенной модели кривой обучения для различных скоростей обучения**

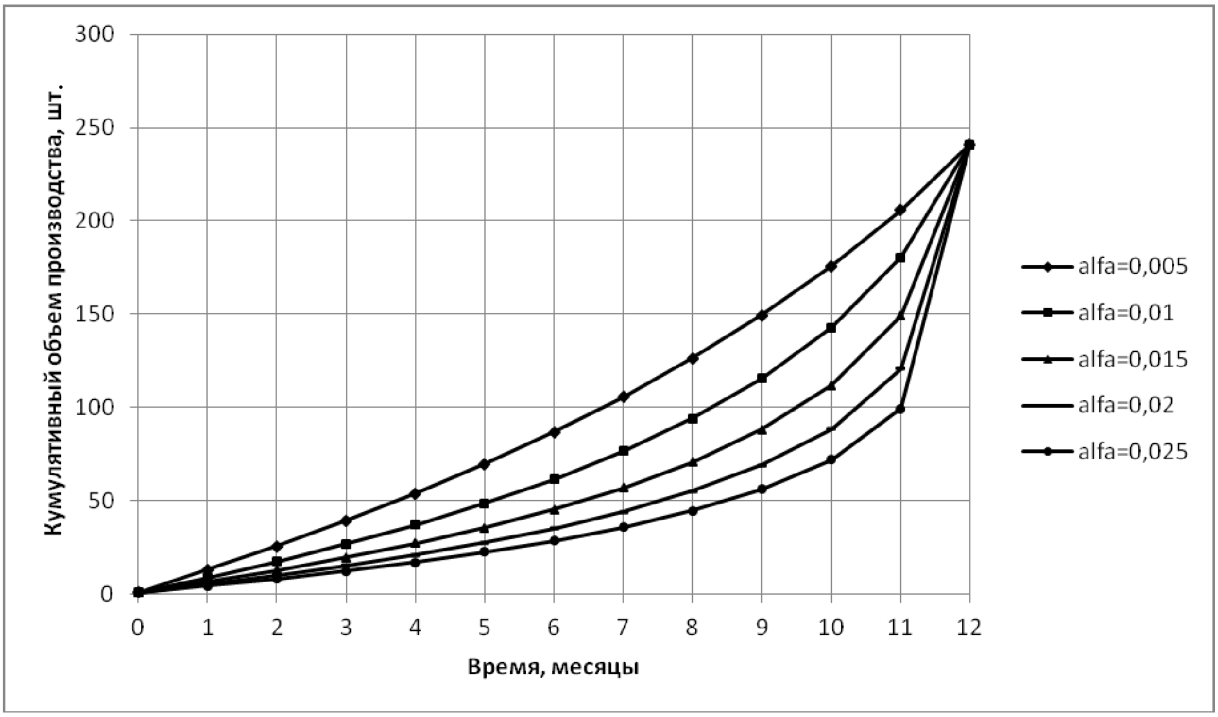

Рис. 2. **Графики оптимальных траекторий кумулятивного объема производства для экспоненциальной модели кривой обучения для различных индексов обучения**

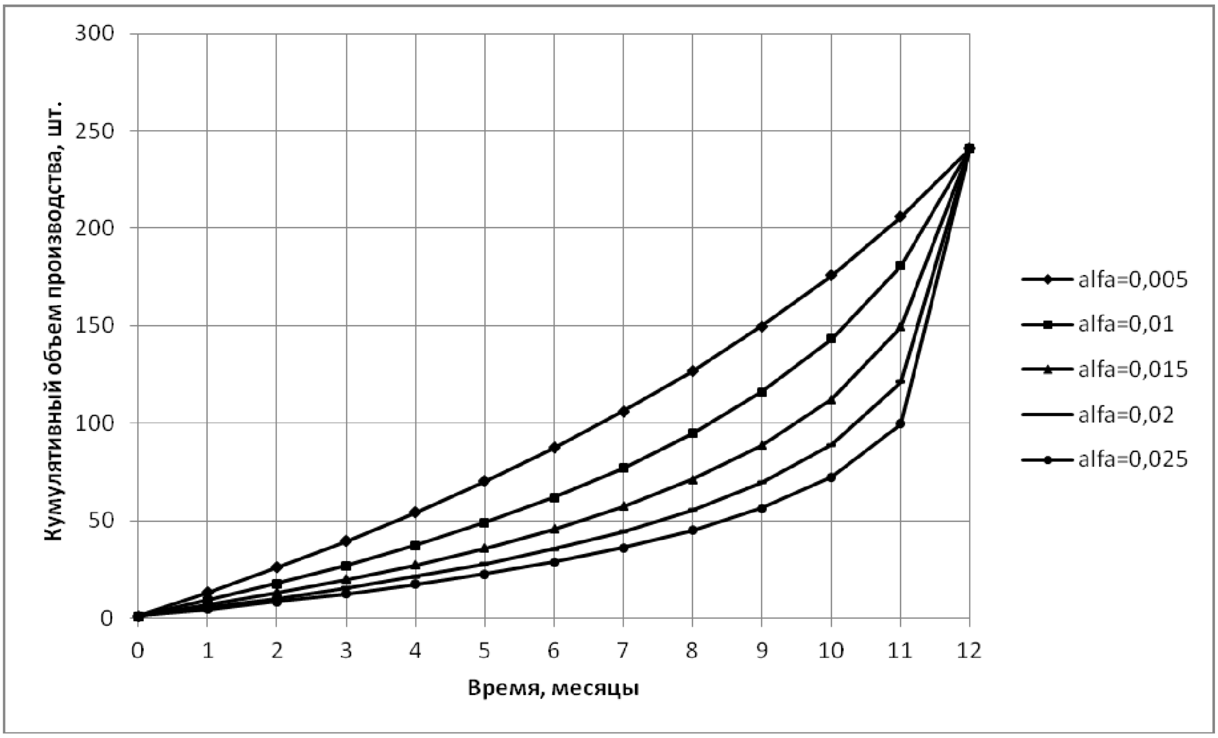

Рис. 3. **Графики оптимальных траекторий кумулятивного объема производства для логистической модели кривой обучения для различных индексов обучения**

кая. В результате решения задачи оптимального управления получены аналитические формулы оптимальных объемов производства в каждый момент времени и оптимальная траектория кумулятивного объема производства для различных моделей кривой обучения.

На основе проведенных исследований можно сформулировать методические рекомендации по выбору оптимальных плановых показателей в период освоения новой продукции:

1. Оптимальной стратегией менеджмента предприятия является постепенное увеличение объемов производства от минимальных в начальных периодах до максимальных в конечных периодах.

2. Оптимальный производственный план выбирается так, чтобы временные или финансовые затраты на производство изделия в каждый момент времени были постоянны.

3. С увеличением скорости обучения оптимальная траектория кумулятивного объема производства становится более “выпуклой”.

4. С увеличением накопленного опыта предприятия до начала осуществления проекта оптимальная траектория кумулятивного объема производства становится менее “выпуклой”.

---

[1] Wright T.P. (1936) Factors affecting the cost of airplanes. *Journal of the Aeronautical sciences,* vol. 3, 4, pp. 122-128.

[2] См.: Badiru A. (1992) Computational survey of univariate and multivariate learning curve models. *IEEE Transactions on Engineering Management,* vol. 39, 2, pp. 176-188; Yelle L.E. (1979) The learning curve: Historical review and comprehensive survey. *Decision Sciences,* vol. 10, 2, pp. 302-328; Learning Curves: Theory, Models, and Applications (2011) / ed. by M. Y. Jaber. Boca Raton, 476 p.

[3] *Новиков Д.А.* Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. 2007. □ 19. С. 5-22.

[4] См.: *Павлов О.В.* Динамические задачи планирования в управлении проектами // Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах. Санкт-Петербург, 2012. С. 1055-1058; *Его же.* Динамическая оптимизация производственной деятельности предприятия с учетом эффекта кривой обучения // Вестник Самарского государственного экономического университета. 2015. □ 3 (125). С. 88-92.

[5] *Павлов О.В.* Аналитическое решение динамической задачи планирования производства в проектах освоения новой продукции // Современные сложные системы управления: сборник материалов XII Междунар. науч.-практ. конф. Липецк, 2017. Ч. 2. С. 275-280.

[6] См.: Wright T.P. Cit . op.; Badiru A. Cit. op.; Yelle L.E. Cit op.; Learning Curves...

[7] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. 4-е изд., стереотип. Москва, 1983.

[8] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления: учеб. для вузов. 3-е изд., испр. и доп. Москва, 2003.

Поступила в редакцию 06.11.2017 г.