Оценка проектов с нечетко определенными денежными потоками

© 2013 Волкова Елена Сергеевна
кандидат физико-математических наук, доцент
© 2013 Гисин Владимир Борисович
кандидат физико-математических наук, профессор
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва
E-mail: vgisin@fa.ru

Рассмотрена модель инвестиционного проекта с нечеткими платежами. С использованием вероятностных распределений выявлены нечеткие отношения безразличия. Изучены семейства распределений и t-норм, при которых отношение безразличия оказывается транзитивным. Эти же условия гарантируют, что при суммировании нечетких величин не происходит накопления нечеткости.

Ключевые слова: инвестиционный проект, нечеткая величина, треугольная норма.

Оценка денежных потоков с помощью чистого приведенного дохода является одной из ключевых моделей современной экономики. В ряде случаев оценку приходится делать в условиях неопределенности. Характер неопределенности в значительной мере предопределяет выбор соответствующего математического аппарата. Далеко не всегда аппарат теории вероятностей оказывается адекватным решаемой задаче. Шекли[1] был одним из первых, кто заметил, что в экономике исходные требования теории вероятностей являются слишком жесткими. В частности, по Шекли, суммирование "вероятностей", которые экономисты приписывают экономическим событиям, не согласуется с экономическими реалиями. Экономические идеи Шекли находят подтверждение в исследованиях по экономическому поведению[2]. Одна из основных математических интерпретаций идей Шекли состоит в переходе от распределения вероятности к распределению возможностей[3]. В случае денежных потоков это равносильно тому, что платежи рассматриваются не как случайные, а как нечеткие величины.

Одна из первых работ, в которой платежи считались нечеткими, была опубликована более четверти века назад[4]. В дальнейшем денежные потоки с нечеткими платежами рассматривались с разных точек зрения[5].

Важным аспектом вычислений с нечеткими величинами является учет зависимости этих величин. Без учета зависимости быстрый рост неопределенности (с увеличением числа операций) может обесценить результаты вычислений. Для описания зависимости нечетких величин используются более мягкие средства, чем в теории вероятностей. Впрочем, в математической теории риска для описания многомерных зависимостей получили широкое распространение копулы. Общепринятым для описания нечетких зависимостей стал аппарат треугольных норм (t-норм) - ассоциативных копул. В теории нечетких множеств t-нормы используются не только для описания зависимостей, но и для моделирования логических операций (отсюда и требование ассоциативности). Такое комбинированное применение t-норм приводит к своеобразным эффектам, в частности к замедлению роста неопределенности. В статье изучаются сочетания функций распределения нечетких величин и t-норм, при которых вычисление чистого дисконтированного дохода (NPV) денежного потока с нечеткими платежами не приводит к росту неопределенности.

Приведем необходимые определения.

Для нечеткого платежа A обозначим через $u(A)$ его приближенное значение. Введем на множестве платежей, отнесенных к одному моменту времени, нечеткое отношение безразличия ~. Будем считать, что платежи A и B связаны отношением ~, если их приближенные значения различаются меньше, чем на некоторое пороговое значение h_{AB} - порог различения. Пороговое значение мы считаем неотрицательной случайной величиной и степень истинности отношения $A \sim B$ определяем формулой

$$\langle A \sim B \rangle = P\left(\left|u(A) - u(B)\right| \le \varepsilon_{AB}\right) \qquad (1)$$

(здесь и далее угловыми скобками мы обозначаем степень истинности заключенного в них утверждения). Таким образом, $\langle A \sim B \rangle$ - число из промежутка $[0;1]$, которое играет роль значения функции принадлежности нечеткого отношения ~, заданного на множестве платежей.

Будем говорить, что отношение безразличия транзитивно, если

$$P\left(\left|u(A)-u(B)\right| \le \varepsilon_{AB}, \left|u(B)-u(C)\right| \le \varepsilon_{BC}\right) \le$$
$$\le P\left(\left|u(A)-u(C)\right| \le \varepsilon_{AC}\right).$$

Мы считаем, что все пороги различения ε_{AB} одинаково и непрерывно распределены. Пусть $F(x)$ - функция распределения. Мы предполагаем также, что пороги различения ε_{AB} и ε_{BC} имеют одинаковые совместные распределения независимо от A, B и C. Пусть $H(x,y)$ - копула, описывающая совместное распределение ε_{AB} и ε_{BC} (необходимые сведения о копулах можно найти в книге Нельсена)[6]. Заметим, что использование копул позволяет учесть зависимость между случайными величинами. Например, $H(x,y)=xy$, если h_{AB} и h_{BC} независимы; $H(x,y)=min(x,y)$, если ε_{AB} и ε_{BC} совпадают.

Формулу (1) можно теперь переписать следующим образом:

$$\langle A \sim B \rangle = 1 - F\left(\left|u(A)-u(B)\right|\right). \qquad (2)$$

Запишем условие транзитивности отношения ~, используя копулу доживания $G(x,y)$, ассоциированную с копулой $H(x,y)$:

$$G\left(1-F\left(\left|u(A)-u(B)\right|\right), 1-F\left(\left|u(B)-u(C)\right|\right)\right) \le 1 -$$
$$- F\left(\left|u(A)-u(C)\right|\right). \qquad (3)$$

Функция $G(x,y)$ убывает по обоим аргументам, при этом $G(x,1)=x$ и $G(1,y)=y$. Если $u(C)$ находится между $u(A)$ и $u(B)$, условие (3) выполняется автоматически. Предположим для определенности, что

$$u(C) \le u(B) \le u(A),$$

и положим $s=u(A)-u(B)$, $t=u(B)-u(C)$. Далее, пусть $q(x)=1-F(x)$. Тогда формулу (3) можно записать следующим образом:

$$G\left(q(s), q(t)\right) \le q(s+t). \qquad (4)$$

Далее мы будем предполагать, что копула $G(x,y)$ является непрерывной архимедовой t-нормой. Тогда $G(x,y)$ допускает следующее представление:

$$G(x,y) = g^{(-)}\left(g(x)+g(y)\right). \qquad (5)$$

В этом представлении $g:[0;1] \to [0;+\infty]$ - непрерывная убывающая функция такая, что $g(1)=0$, а $g^{(-)}(y)$ - ее квазиобратная, совпадающая с обратной функции $g(x)$ на промежутке $[0;g(0)]$ и тождественно равная нулю на промежутке $[g(0);+\infty]$. Функция $g(x)$ называется аддитивным генератором t-нормы $G(x,y)$.

Применим представление (5) к левой части неравенства (4):

$$g^{(-)}\left(g\left(q(s)\right)+g\left(q(t)\right)\right) \le q(s+t).$$

Теперь применим функцию g к обеим частям полученного неравенства. Получаем:

$$g\left(q(s)\right)+g\left(q(t)\right) \ge g\left(q(s+t)\right). \qquad (6)$$

Свойство функции $h(s)=g\left(q(s)\right)$, выраженное равенством (6), называют субаддитивностью. Легко видеть, что $h(0)=0$. Без потери общности можно считать, что функция $h(s)$ определена на положительной полуоси. Вогнутость функции $h(s)$ является достаточным условием ее субаддитивности.

Подытожим предыдущие рассуждения в следующей теореме.

Теорема 1. Если функция $h(s)=g\left(q(s)\right)$ субаддитивна, отношение безразличия транзитивно.

Результат, содержащийся в предыдущей теореме, был опубликован вторым автором настоящей статьи в 1990 г.[7] и затем в 1994 г.[8] В случае, когда функция $g(x)$ является квазиобратной для функции $q(s)$, результат был получен Овчинниковым[9]. Результат теоремы 1 был использован в ряде более поздних работ[10].

Рассмотрим теперь, как суммируются нечеткие платежи. В соответствии с (2) с нечетким платежом A ассоциируется нечеткая величина с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = 1 - F\left(\left|x-u(A)\right|\right), \qquad (7)$$

или, что то же:

$$\mu_A(x) = q\left(\left|x-u(A)\right|\right).$$

Чтобы не усложнять обозначения, мы используем для этой нечеткой величины то же обозначение, что и для платежа.

В соответствии с принципом обобщения сумма нечетких величин A и B определяется формулой

$$\mu_{A+B}(z) = sup\left\{ G\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right) \middle| x+y=z \right\}.$$

В теории нечетких множеств величина $\mu_{A+B}(z)$ трактуется как оценка возможности того, что значение суммы нечетких величин A и B окажется равным z.

Теорема 2. Если функция $h(s)=g(q(s))$ субаддитивна, то

$$\mu_{A+B}(z)=q(|z-(u(A)+u(B))|). \qquad (8)$$

Смысл теоремы 2 в том, что при выполнении ее условий суммирование нечетких платежей не приводит к росту неопределенности: сумма нечетких платежей с точностью до сдвига вдоль оси имеет такую же функцию принадлежности, что и слагаемые. Теорема 2 допускает очевидное усиление, которое понадобится нам для дальнейшего.

Теорема 2'. Пусть функция $h(s)=g(q(s))$ субаддитивна, функция принадлежности величины A задается формулой (7), а функция принадлежности нечеткой величины B такова, что $\mu_B(x)\le q(|x-u(B)|)$ для всех x и $\mu_B(u(B))=1$. Тогда справедливо (8).

Рассмотрим теперь поток платежей $(A_0,A_1,\ldots,A_n)$, в котором нечеткий платеж A_k отнесен к моменту времени $t=k$. Чистый приведенный доход относительно ставки приведения r задается формулой

$$NPV=A_0+\frac{A_1}{1+r}+\ldots+\frac{A_n}{(1+r)^n}. \qquad (9)$$

Суммирование нечетких величин в (9) выполняется относительно *t*-нормы G.

Рассмотрим более подробно нечеткость отдельных слагаемых в (9). Предположим, что нечеткость платежей A_k задается функцией принадлежности вида (7), в которой распределение $F(x)$ берется из параметрического семейства распределений $F_\alpha(x)$, монотонно зависящих от параметра. Для определенности будем считать, что если $\alpha_1\le\alpha_2$, то $F_{\alpha_1}(x)\ge F_{\alpha_2}(x)$ при всех x. Соответственно, $q_{\alpha_1}(x)\le q_{\alpha_2}(x)$, где $q_\alpha(x)=1-F_\alpha(x)$. Параметр α служит в определенной мере показателем нечеткости на соответствующем временном горизонте.

Предположим, что функция принадлежности $\mu(x)$ нечеткого платежа A_k имеет вид (7), т.е. $\mu_k(x)=q_{\alpha(k)}(|x-u(A_k)|)$ для некоторого $\alpha(k)$. Тогда функция принадлежности $\mu'(x)$ дисконтированного платежа $\frac{A_k}{(1+r)^k}$ в соответствии с принципом обобщения вычисляется следующим образом:

$$\mu'(x)=\mu((1+r)^k x)=q_{\alpha(k)}\left((1+r)^k\left|x-\frac{u(A_k)}{(1+r)^k}\right|\right).$$

Будем говорить, что нечеткость платежей согласована с дисконтированием, если для каждого k имеется такое значение параметра $\alpha'(k)$, что

$$q_{\alpha(k)}((1+r)^k s)=q_{\alpha'(k)}(s) \text{ для всех } s\ge 0.$$

Предположим, что это так для потока платежей $(A_0,A_1,\ldots,A_n)$. Положим $\alpha=max\{\alpha'(k)|k=1,\ldots,n\}$. В случае, когда функция $g(q_\alpha(s))$ субаддитивна, чистый приведенный доход, вычисленный по формуле (9), представляет собой нечеткую величину с функцией принадлежности

$$\mu_{NPV}(x)=q_\alpha(|x-u(NPV)|), \qquad (10)$$

где $u(NPV)=u(A_0)+\frac{u(A_1)}{1+r}+\ldots+\frac{u(A_n)}{(1+r)^n}$ - чистый приведенный доход, вычисленный для приближенных значений платежей.

Пример. Рассмотрим параметрическое семейство функций распределения $F_\lambda(x)=1-e^{-\lambda x}$, $\lambda>0$. Здесь $F_{\lambda_1}(x)\ge F_{\lambda_2}(x)$, если $\lambda_1\ge\lambda_2$. Легко видеть, что $F_\lambda((1+r)^k x)=F_{\lambda'}(x)$ для $\lambda'=(1+r)^k\lambda$. Значит, нечеткость платежей A_k, заданная набором функций распределения $F_{\lambda(k)}$, $k=0,1,\ldots,n$, будет согласована с дисконтированием. Пусть $G(x,y)=\max(x+y-1,0)$ - *t*-норма, порожденная аддитивным генератором $g(x)=1-x$. Имеем $g(q_\lambda(x))=1-e^{-\lambda x}$. Легко непосредственно проверить, что функция $h(x)=1-e^{-\lambda x}$ субаддитивна при любом λ. Таким образом, выполняются все условия, при которых применима формула (10). Имеем

$$\mu_{NPV}(x)=1-exp(-\lambda|x-u(NPV)|),$$

где $\lambda=min\{(1+r)^k\lambda(k)|k=0,1,\ldots,n\}$.

В заключение приведем результаты исследования субаддитивности функций $h(x)=g(1-F(x))$, полученных в результате комбинирования функций распределения $F(x)$ и аддитивных генераторов $g(x)$.

1. Если $q(x)=1-F(x)$ имеет ограниченный носитель, $g(0)=+\infty$ и $g(x)<+\infty$ при $x>0$, то $h(x)$ не субаддитивна.

2. Для $g(x)=(1-x)^a$ результаты представлены в следующей таблице.

Субаддитивность	F1	F2	F3	F4	F5
Да	$a\le 1$	$a\le 1/2$	$a\le 1/\alpha$	$ar\le 1$, $a(r+s)\ge 2$, $r+s\ge 2$	$a\le 1/\alpha$
Нет	$a>1$	$a>1/2$	$a>1/\alpha$	$a>1/r$	$a>1/\alpha$

Для удобства рассмотренные семейства распределений перенумерованы.

(F1) Равномерное распределение на промежутке $[0;\alpha]$: $F(x)=x/\alpha$ при $0\le x\le\alpha$ и $F(x)=1$ при $x\ge\alpha$, $\alpha>0$.

(F2) Симметричное треугольное распределение на промежутке $[0;\alpha]$: $F(x)=2x^2/\alpha^2$ при $0\le x\le\alpha/2$, $F(x)=1-2(x-\alpha)^2/\alpha^2$ при $\alpha/2\le x\le\alpha$ и $F(x)=1$ при $x\ge\alpha$, $\alpha>0$.

(F3) Гамма-распределение с функцией плотности $f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{\lambda x}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$.

(F4) Бета-распределение с функцией плотности $f(x)=\dfrac{1}{B(r,s)}x^{r-1}(1-x)^{s-1}$ на промежутке от нуля до единицы и нулевой плотностью за пределами этого промежутка, $r>0$, $s>0$.

(F5) Распределение Вейбула $F(x)=1-e^{-\lambda x^\alpha}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$.

Рассматриваются семейства *t*-норм, порожденные следующими аддитивными генераторами:

(g1) $g(x)=(1-x)^a$, $a>0$;

(g2) $g(x)=x^{-a}-1$, $a>0$;

(g3) $g(x)=1-x^a$, $a>0$;

(g4) $g(x)=log_a(x+(1-x)a)$, $a>0$, $a\ne 1$;

(g5) $g(x)=ln\left(1-a+\dfrac{a}{x}\right)$, $a>0$;

(g6) $g(x)=\left|log_a\dfrac{a-1}{a^x-1}\right|$, $a>0$, $a\ne 1$.

Приведем теперь полученные результаты:

3. Субаддитивность функции $h(x)$ установлена в следующих случаях:

1) (F1)в комбинации с (g3) при $a\ge 1$ и (g4) при $a>1$;

2) (F3), $\alpha=1$, в комбинации с (g3) при $a>0$, (g4) при $a>0$, $a\ne 1$, (g5) при $a\ge 1$, (g6) при $a>1$.

4. (F5) при $\alpha=1$ в комбинации с перечисленными генераторами приводит к нарушению субаддитивности при всех значениях параметров.

---

[1] *Shackle G.L.S.* Decision, Order and Time in Human Affairs. Cambridge, 1961.

[2] *Magni C.A.* Reasoning the ‘net-present-value’ way: Some biases and how to use psychology for falsifying decision models // Papers.ssrn.com. Jan. 2010. URL: http://www.academia.edu/487892/Reasoning_the_net-present-valueway_Some_biases_and_how_to_use_psychology_for_falsifying_decision_models.

[3] *Dubois D., H Prade H.* Possibility theory and its application: Where do we stand // Mathware and Soft Computing. 2011. № 18 (1). P. 18-31.

[4] *Buckley J.J.* The Fuzzy Mathematics of Finance // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 21. P. 257-273.

[5] См.: *Carlsson C., Fuller R.* CapitalBudgeting Problems with Fuzzy Cash Flows // Mathware& Soft Computing. 1999. V. 6. P. 81-89; *Kuchta D.* Optimization with Fuzzy Present Worth Analysis and Applications // Kahraman C. (Ed.) Fuzzy Engineering Economics with Applications. Berlin; Heidelberg, 2008; *Волкова Е.С., Гисин В.Б.* Внутренняя норма доходности денежных потоков с нечетко определенными платежами // Oeconomia, Aerarium. Jus. 2012. № 3(04). С. 30-34.

[6] *Nelsen R.B.* An Introduction to Copulas.N.Y., 2006.

[7] *Gisin V.B.* Fuzzy orderings of real numbers // Towards a Unified Fuzzy Sets Theory, 2-d Joint IFSA-EC and Euro-WG Workshop on Fuzzy Sets. Visegrad, Hungary, 1990. P. 39-40.

[8] *Gisin V.B.* Fuzzy positive cones of real numbers // Proc. 2-nd Eur.Congr.on Int. Tec. and Soft Computing, Aachen. 1994. V. 2. P. 979-983.

[9] *Ovchinnkov S.* Transitive fuzzy orderings of Real Numbers // Fuzzy Sets and Systems, 3. 1989. P. 283-295.

[10] *De Baets B., Mares M ,Mesiar R.* T-partitions of the real line generated by idempotent shapes //Fuzzy Sets and Systems. 1997. V. 91. № 2. P. 177-184.

Поступила в редакцию 04.03.2013 г.