Модели управления объектами жилищно-коммунального хозяйства в условиях неопределенности

© 2012 В.П. Чернышов
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)
E-mail: zaskanov@mail.ru

Рассматривается задача принятия решений по управлению объектами жилищно-коммунального хозяйства, в которой цели и ограничения не обязательно являются четко сформулированными. В статье предложены методы и модели, позволяющие идентифицировать такого рода задачи, охарактеризовать свойства их решения и, насколько это возможно, настроить алгоритмы их реализации.

Ключевые слова: управление, неопределенность, нечеткие множества, оптимизация, критерии, ограничения.

В основе современной теории управления организационными системами лежит понятие оптимизации. Ищут оптимальные решения, т.е, значения переменных, доставляющие максимум (минимум) целевой функции и удовлетворяющие ряду ограничений. Когда речь заходит о целях или ограничениях, чаще всего подразумевается, что они хорошо известны. В последние же годы все яснее становится то, что практика управления уже достигает той границы, где неопределенность начинает играть существенную роль. Умение разрешать неопределенности или даже просто работать с ними требует восприимчивости к условиям окружающей обстановки.

В данной статье рассматриваются задачи принятия решения (ЗПР), в которых цели и ограничения не обязательно являются четко сформулированными. Необходимо научиться идентифицировать такого рода задачи, охарактеризовать свойства их решений и, насколько это возможно, построить методы их решения.

Под ситуацией принятия решения будем понимать:

- множество альтернатив, из которых лицо, принимающее решение (ЛПР), производит выбор;
- множество ограничений, накладываемых на этот выбор;
- целевую функцию, которая позволяет ЛПР ранжировать имеющиеся у него альтернативы.

Для задач принятия решения в условиях определенности характерно то, что каждый конкретный выбор дает единственное значение целевой функции. Получается, что не существует особых трудностей в описании предпочтений по исходам. Иными словами, каждое ЛПР имеет множество четко сформулированных целей, на основе которого оно способно определить свои предпочтения.

Если рассмотреть некоторые реальные ситуации принятия решения, то можно заметить, что они не удовлетворяют приведенному выше определению.

Очевидно, что реальное ЛПР использует выражение типа "z должно быть в окрестности y", которое не представляет собой четко сформулированной цели.

Выражение "в окрестности...." можно описать нечетким подмножеством, определяемым функцией $f : X \to L$, где L - упорядоченное множество (решетка).

Таким образом, нечеткую обстановку можно рассматривать как множество X альтернатив вместе с его нечеткими подмножествами, представляющими собой нечетко сформулированные критерии (цели и ограничения), т.е. как систему $(X, f_0,...,f_n, L)$.

В такой задаче принять во внимание по возможности все критерии означает построить функцию $D = f_0 \wedge f_1 \wedge ,..., \wedge f_n$. Оптимум соответствует той области X, элементы которой максимизируют D.

Имея в виду, что в формулировке решения цели и ограничения участвуют одинаковым образом (принцип слияния), нечеткую обстановку можно определить как тройку (X,D,L). Ход рассуждения полагает, что решение можно определить как нечеткое подмножество универсального множества альтернатив.

Под оптимальным решением понимаем элемент $x_0 \in X$ (если такой существует), для которого $D(x_0) = \sup_{x \in X} D(x)$ [1]. Это и есть случай нечеткого математического программирования (НМП).

Здесь, пожалуй, уместно отметить, что любая задача НМП является задачей многокритериальной оптимизации и что соответствие $(X, f_0, ..., f_n, L) \to x_0$ есть компактная запись общей задачи математического программирования, которая, как уже говорилось, заключается в том, чтобы каждому семейству целей и ограничений сопоставить некоторое подмножество множества альтернатив, называемое оптимизирующим множеством.

Цель статьи - использование математического аппарата нечетких множеств для решения задач планирования - управления активами частного капитала.

В работе[2] решены теоретические проблемы применения математического аппарата нечетких множеств, который позволил не только рассуждать о нечеткой обстановке, но и получить результат, полезный для решения задач математического программирования в такой обстановке.

Практическое значение данного результата в том, что он позволяет без труда свести задачу НМП к классической задаче математического программирования. При этом необходимо решать ЗПР в хорошо известной ситуации управления активами клиента. Рассмотрим случай задачи планирования, сформулированной в форме задачи линейного программирования. Она характеризуется ограничениями вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le b_i, i = 1,...,m$, которые определяют допустимую область. Ясно, что при несовместных ограничениях эта область пустая. В таком случае налицо необходимость модификации ограничений. Менеджеру желательно выяснить, как изменить ограничения задачи, чтобы появились допустимые решения. Фактически он хочет знать, как минимально изменить первоначальный вариант описания, чтобы задача стала разрешимой. Ясно, что для этого можно изменить коэффициенты b_i.

Предположим, что планирование происходит гибким образом, т.е. менеджер оперирует не числами, а интервалами. Это означает, что вместо чисел b_i он использует интервалы $[b_i, B_i]$. Задача успешно решается, если в данном интервале найдется число γ, такое, что неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < \gamma$ будут описывать допустимую область.

Дадим процедуру нахождения числа γ в интервале $[b, B]$, расположенного по возможности ближе к b. Рассматриваемую ситуацию планирования можно формулировать так: найти вектор $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_n}) \in \Re^n$, такой, что $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j \in [b_i, B_i]$ и разность $a_{ij} \bar{x}_j - b_i$, по возможности, мала для любого $i = 1, ... m$.

Последнее ограничение можно описать нечетким множеством $F_j : \Re^n \to [0,1]$, $F_i = \dfrac{B_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{B_i - b_i}$.

Учитывая теорему об аппроксимации[3] и используя обозначение $x_{n+1} = \min_i F_i(x)$, приходим к следующей простой задаче планирования: найти max x_{n+1} при ограничении $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le + (B_i - b_i)\ x_{n+1} < B_i$.

Преимущество такого представления исходной задачи налицо: оно позволяет пользоваться обычными вычислительными методами нахождения оптимальных решений. В этом случае нечеткость не является неприятной особенностью задачи планирования; она оказывается довольно удачным и подходящим свойством. Этот способ использования гибкости нечетких ограничений, по-видимому, соответствует характеру мышления клиента банка.

Главная идея здесь заключена в том, что многие нечеткие по своей природе модели можно описывать детерминированным образом и что недостаток точности модели возмещается ее гибкостью.

До сих пор под принятием решения в нечеткой обстановке понимался процесс принятия решения, в котором цели и ограничения представляют собой нечеткие множества.

Обычно же целевая функция или функция стоимости определяется не как нечеткое множество, а как функция $f : X \to \Re$, которая также служит субъективной мерой эффективности некоторого действия.

В данном случае роли целей и ограничений несимметричны. Обсудим теперь эту проблему. Известно, что для каждого нечеткого множества $f : \Re \to [0.1]$ можно определить множества уровня

$$N_\alpha(f)=\{r\in\Re \mid f(r)\geq\alpha\},\ \alpha\in[0.1],$$

причем $N_0(f)=\Re$ и $\alpha\leq\beta\Rightarrow N_\alpha(f)\supseteq N_\beta(f)$.

Нечеткое множество $f:\Re\to[0.1]$ называется ограниченным, если ограничены все множества $N_\alpha(f)$ при $\alpha\neq 0$.

Отметим, что ограниченность sup f влечет за собой ограниченность f, поскольку supp $f=\bigcup\limits_{\alpha\neq 0} N_\alpha(f)$.

Легко показать, что если $g\leq f$ и f - ограниченное множество, то g - также ограниченное множество, и что из ограниченности f и g следует ограниченность $f\vee g$.

Допустим, что имеется ограниченное нечеткое множество $f:\Re\to[0.1]$. Для того чтобы определить границы, положим:

$$\inf f=\{\inf N_\alpha(f)\}_{\alpha\neq 0}=\{m_\alpha\}_{\alpha\neq 0},$$

$$\sup f=\{\sup N_\alpha(f)\}_{\alpha\neq 0}=\{M_\alpha\}_{\alpha\neq 0}.$$

Отметим, что границы нечеткого множества - семейства действительных чисел, точнее, функции [O, 1] $\to\Re$.

Если упорядочить эти семейства:

$$(\alpha_\alpha)_\alpha\leq(b_\alpha)_\alpha\Leftrightarrow\alpha_\alpha\leq b_\alpha\ \ \forall_\alpha,$$

то получим

$$\inf f<\sup f.$$

Пусть имеется функция $f_0:X\to\Re$. Обычные задачи оптимизации записываются в виде

$$A\subseteq X\Rightarrow \sup_{x\in A} f_0(x)\ \text{ или }\ \inf_{x\in A} f_0(x).$$

Пусть $f\in F(X)$ - нечеткое подмножество $X, f:X\to[0{,}1]$. Под sup f_0 понимается sup $f_0\,(f)$, где $f_0(f):\Re\to[0{,}1]$ - образ нечеткого множества f при отображении f_0.

Известно, что

$$f_0(f)(x)=\begin{cases}\vee_{f_0(x)=r} f(x), & \text{если } r\in f_0(X);\\ 0, & \text{если } r\notin f_0(X).\end{cases}$$

Тогда $\sup f_0=\sup f_0\,(f)=\{\sup N_\alpha f_0(f)\}_{\alpha\neq 0}$. Поскольку $N_\alpha f_0(f)\supseteq f_0(N_\alpha(f))$, имеем

$$\sup f_0\geq\left\{\sup_{N_\alpha(f)} f_0\right\}_{\alpha\neq 0}.$$

Таким образом, для того чтобы получить оптимум f_0 на f, мы должны решить бесконечное множество обычных задач оптимизации. Вместо этого такого рода задачи решаются с помощью понятия аппроксимации нечеткого множества[4].

Рассмотрим операцию с множеством допустимых альтернатив, представляющим собой распределения ресурсов, которые ЛПР может вложить в данную операцию. Очевидно, было бы неразумным проводить резкую границу для множества допустимых альтернатив, поскольку может случиться так, что распределения, лежащие за этой границей, дадут эффект, перевешивающий меньшую желательность этих распределений для ЛПР.

В таких случаях представляется целесообразным вводить нечеткое множество допустимых элементов и, следовательно, рассматривать задачу как задачу НМП с применением подхода, дающего ЛПР больше свободы в использовании его субъективных представлений о ситуации.

Требуется максимизировать внешний критерий - функцию $\varphi:X\to\Re$ на заданном нечетком множестве допустимых альтернатив f.

Для любого λ, удовлетворяющего условию $N_\lambda(f)\neq\varnothing$, введем множество

$$N(\lambda)=\left\{x \mid \varphi(x)=\sup_{x'\in N_\lambda(f)}\varphi(x')\right\}.$$

Под решением указанной задачи НМП будем понимать нечеткое подмножество нечеткого множества f с функцией принадлежности

$$\mu^1(x)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in N(\lambda)}\lambda, & \text{при } x\in N(\lambda)\\ 0, & \text{в противном случае}.\end{cases}$$

Следующее предложение дает возможность выразить решение в более простой форме. Легко показать, что

$$x\in\operatorname{supp}\mu^1(x)\Rightarrow\mu^1(x)=f(x),$$

откуда

$$\mu^1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{при } x\in\bigcup\limits_{\lambda>0}N(\lambda)\\ 0, & \text{в противном случае}.\end{cases}$$

Будем говорить, что решение 1 задачи НМП существует, если $\mu^1(x)$ тождественно не равно нулю. Отсюда немедленно следует, что данная задача НМП имеет решение 1 тогда и только тогда, когда найдется такое число $\lambda > 0$, для которого $N(\lambda) \neq \varnothing$.

Нечеткое максимальное значение функции $\varphi(x)$ на заданном нечетком множестве $f(x), f: X \to [0, \ 1]$ есть нечеткое подмножество $\Re$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_\varphi(r) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \sup_{\lambda: x\in N(\lambda)}.$$

Рассмотрим некоторые простые свойства решения 1, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$r_0 \in \operatorname{supp} \mu_\varphi(r) \Rightarrow \bigcup_{\lambda>0} N(\lambda) \bigcap \varphi^{-1}(r_0) \neq \varnothing,$$

$$r_0 \in \operatorname{supp} \mu_\varphi(r) \Rightarrow \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} \mu^1(x) = \sup_{x\in\varphi^{-1}(r)} f(x).$$

Функция принадлежности $\mu_\varphi(r)$ монотонно убывает на множестве $\operatorname{supp}\mu_\varphi(r)$.

Если ЛПР надо выбрать в качестве решения один-единственный элемент x, то его выбор должен основываться не только на значении принадлежности $\mu^1(x)$, но и на значении функции $\varphi(x)$, соответствующем этому элементу. Чем больше значение φ, тем меньше значение степени принадлежности элемента x_0, для которого $\varphi(x) = r_0$, нечеткому множеству μ^1. Иными словами, ЛПР должно принимать во внимание четкое значение $\mu_\varphi(r)$ и вначале выбрать пару $(r_0, \mu_\varphi(r_0))$, согласующуюся с его желанием получить как по возможности большее значение принадлежности r_0, так и по возможности большее значение принадлежности r_0 нечеткому множеству $\mu_\varphi(r)$.

Другой тип решения рассматриваемой здесь задачи НМП основывается на понятии максимума Парето в векторной оптимизации.

Пусть P - множество максимальных по Парето элементов для двух функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ на множестве X, тогда решением 2 задачи НМП является нечеткое множество

$$\mu^2(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in P \\ 0 \ \text{ в противном случае} \end{cases}.$$

Легко показать, что $P \subset \bigcup_{\lambda>0} N(\lambda)$. Это означает, что для всех $x \in X$ выполняется равенство $\mu^2(x) \leq \mu^1(x)$ и, следовательно, решение 2 всегда является подмножеством решения 1.

Решение 2 явно предполагает, что ЛПР должно использовать в своем нечетком решении только те элементы универсального множества X, для которых значения функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ одновременно неулучшаемы. Другими словами, если ЛПР надо выбрать в качестве решения единственный элемент x_0, оно должно взять его из элементов четкого множества $\operatorname{supp} \mu^2(x)$.

Весьма интересным оказывается то, что оба решения 1 и 2 при некоторых условиях дают одно и то же нечеткое значение функции $\varphi(x)$. Это следует из теоремы о том, что если X - бикомпактное множество, функция $\varphi(x)$ непрерывна на X, а функция $f(x)$ полунепрерывна сверху на X, то $\mu^2_\varphi(r) = \mu^1_\varphi(r)$ для любого $r \in \Re$.

В заключение статьи рассмотрим взвешенную свертку в НМП.

Наше понимание нечеткой обстановки в связи с задачей принятия решений опиралась на следующее определение: нечеткая обстановка есть набор $(X, f_0, \ldots f_n, L)$, где X - множество альтернатив, L - некоторая решетка и $f_i: X \to L, i = 0, 1, 2, \ldots, n,$ - нечеткие критерии. Рассматривая все критерии как равнозначные в соответствии с принциом слияния Беллмана-Заде, математически нечеткую обстановку можно определить как тройку (X, D, L), где $D = f_0 \wedge f_1 \wedge \ldots \ \wedge f_n$. Этот путь рассуждений подразумевает, что решение можно определить как подмножество множества альтернатив. Под оптимальным же решением понимается точка $x^0 \in X$ (если такая существует), для которой

$$D(x^0) = \sup_{x\in X} D(x).$$

Однако в реальном мире многие решения принимаются в нечеткой обстановке при наличии целей неодинаковой значимости. В этом случае понятие нечеткой обстановки должно включать в себя взвешивание целей для того, чтобы можно было получить адекватную формулировку основной задачи принятия решения.

Можно рассматривать взвешивание критериев в виде отображения $P(N_n) \to L$, где N_n - множество индексов критериев. Это отображение должно быть нечеткой мерой, отражающей предпочтения, т.е. степени значимости различных коалиций, образованных из элементов множества N_n.

Сразу же уточним понятие нечеткой меры. Нечеткой мерой[5] называется функция множества $g(\cdot)$, определенная на монотонном семействе подмножеств множества N_n и обладающая следующими свойствами:

1) $g(\varphi)=0$ и $g(N_n)=1$;

2) если $A, B \in P(N_n)$ и $A \subset B$, то $g(A) \le g(B)$.

В данном определении свойство 1 означает ограниченность и неотрицательность, а свойство 2 - монотонность. Отметим, что здесь не говорится об аддитивности. Монотонность представляется очень естественным допущением о характере субъективных суждений человека, в то время как условие аддитивности излишне ограничительно.

Теперь с помощью нечетких мер можно определить нечеткие интегралы, очень похожие на интегралы Лебега.

Для каждого $x \in X$ рассмотрим отображение $h_x : N_n \to L$, которое задается выражением $h_x(i) = f_1(x)$.

Пусть функция-решение $D : X \to L$ определяется в виде нечеткого интеграла:

$$D(x) = \underset{N_n}{f}\, h_x(i) \cdot g = \sup_{M \in P(N_n)} \inf_{i \in M} h_x(i) \Lambda g(M),$$

где f - символ нечеткого интеграла и в то же время символ нечеткости, а $\cdot$ - символ композиции.

Элемент $\bar{x} \in X$, максимизирующий $D(x)$, - оптимальное решение.

---

[1] *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М., 1981.

[2] Там же.

[3] Там же.

[4] Там же.

[5] Там же.

Поступила в редакцию 04.07.2012 г.