Энтропия как мера неопределенности в анализе рисковых ситуаций при выборе финансовых решений

© 2011 А.И. Пилипенко
доктор педагогических наук, профессор
Российский государственный университет дружбы народов
E-mail: OET2004@yandex.ru

Автором предложен способ количественной оценки и учета неопределенности при выборе финансовых решений, основанный на понятии энтропии.

Ключевые слова: риск, рисковая ситуация, мера риска, ситуация неопределенности, мера неопределенности.

> *Однако, как будет видно из нашего предварительного рассмотрения проблемы прибыли, источником затруднений, возникающих в данной области, является путаница мыслей, глубоко уходящая корнями в самые основы нашего мышления. Чтобы распутать этот клубок, следует обратиться к понятию риска или неопределенности и к той неоднозначности, которая кроется в этих понятиях. Поэтому на них, в конце концов, будут сосредоточены основные наши рассуждения.*
>
> Найт Ф.Х. Риск, неопределенность и прибыль

Понятия ***риск*** и ***неопределенность*** фигурируют в ситуациях принятия финансово-экономических решений в контексте отсутствия или недостатка определенности, т.е. отсутствия твердой уверенности в конечном результате. Например, менеджеры компаний должны ежедневно принимать решения о продажах, покупках, организации работы производственных и иных подразделений фирмы. При этом они сталкиваются с изменением конъюнктуры на рынках, действиями конкурентов, сменой предпочтений потребителей, экологическими ограничениями, особенностями законодательства и другими факторами. При ведении бизнеса менеджеры преследуют различные цели: увеличение прибыли, рост стоимости компании, расширение своей доли рынка выпускаемой продукции и т.д. Перечисленные факторы и цели могут частично противоречить друг другу, что усиливает степень неопределенности при принятии решений. Очевидно, никакой бизнес не может вестись в условиях полной определенности.

Таким образом, усложнение хозяйственной практики, развитие финансовых рынков делают критически важным учет ***риска*** и ***неопределенности***[1].

Понятия "риск" и "неопределенность" очень близки и, воспринимаемые с позиций житейского, не научного, знания, часто используются как синонимы[2] (см., например[3]). Но для корректного использования построенного на этих понятиях аналитического инструментария необходимо четкое разграничение этих терминов. На необходимость такого противопоставления в связи с экономическими расчетами субъектов рынка, действующих в условиях конкуренции, еще в 1921 г. указал американский экономист Фрэнк Хейнеман Найт[4]. Согласно его классификации термин "риск" следует использовать, когда известно распределение случайной величины, с помощью которой моделируют рисковую ситуацию. По-другому это можно назвать "измеримой неопределенностью". Слово "неопределенность" Найт предлагал применять в тех случаях, когда исход не определен и распределение вероятностей неизвестно (так называемая "неизмеримая неопределенность")[5].

Развивая информационный подход Ф. Найта, обратим внимание на то обстоятельство, что анализ рисковой ситуации, как ситуации "измеримой неопределенности", должен быть дополнен еще одной количественной характеристикой - ***мерой неопределенности***. Действительно, в тех случаях, когда рассчитанные значения математического ожидания и среднеквадратического отклонения от него не дают возможности однозначно выбрать лучшее решение, главным аргументом может стать численное значение меры неопределенности.

Покажем, как можно ввести такую меру. Вначале ограничимся качественными рассуждениями.

Пусть доходность некоторой финансовой операции как случайная величина представляет собой следующую систему событий:

$$A_1, A_2, ..., A_n\ . \tag{1}$$

Очевидно, это будет полная система событий. Соответствующие данным событиям вероятности пусть оцениваются как

$$p_1 = p(A_1),\ p_2 = p(A_2), ...,\\ p_n = p(A_n), \tag{2}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\ . \tag{3}$$

Полагая, что $n > 2$, рассмотрим три частных случая:

1) $p_1 = 0{,}99$, и следовательно, вероятность каждого из остальных событий мала;

2) $p_1 = 0{,}49$, $p_2 = 0{,}49$, и следовательно, вероятность каждого из остальных событий мала;

3) вероятности всех событий сравнимы между собой.

В случае 1 можно достаточно уверенно предсказать, что, по-видимому, произойдет событие A_1. В случае 2 предсказание будет менее определенным - произойдет, по-видимому, либо событие A_1, либо событие A_2. В случае 3 предсказать что-либо трудно.

Можно сказать, что в случае 2 система событий более неопределенна, чем в случае 1, а в случае 3 более неопределенна, чем в случае 2.

Вводя количественную меру неопределенности полной системы событий, вполне логично потребовать, чтобы каждое событие вносило свой вклад в эту величину следующим образом. Событие, вероятность которого близка к единице, должно вносить малый вклад в меру неопределенности системы, так как относительно этого события с большой степенью уверенности можно считать, что оно случится. Точно так же малый вклад в меру неопределенности должно вносить событие, вероятность которого очень мала, так как с большой степенью уверенности можно предсказать, что это событие не случится. И наоборот, вклад в меру неопределенности события, вероятность которого заметно отлична и от 0 и от 1, существенна, ибо трудно предвидеть, произойдет это событие или нет.

Основываясь на данных соображениях, целесообразно за меру неопределенности H системы событий (1) принять величину

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i \tag{4}$$

(о выборе основания логарифма a скажем чуть позднее). Здесь i-е событие системы (1) вносит в меру неопределенности H вклад, равный слагаемому

$$-p_i \log_a p_i \tag{5}$$

суммы (4).

Величина (5) всегда неотрицательна. Она стремится к нулю при $p_i \to 1$ и при $p_i \to 0$. Следовательно, равна нулю мера неопределенности системы событий, у которой вероятность какого-то события равна 1, а вероятности всех остальных событий равны 0. Только при таком распределении вероятностей событий мера неопределенности системы событий равна нулю. Очевидно, это минимально возможное значение введенной нами меры неопределенности финансовой операции. Действительно, при любом ином распределении вероятностей событий мера неопределенности (4) положительна.

Заметим, что в физических измерениях величина H, определяемая формулой (4), называется энтропией данного опыта.

Заметим также, что величина (4), введенная нами как мера "измеримой неопределенности", в предельном случае оказывается мерой полной, или "неизмеримой" неопределенности. В самом деле, если мы будем искать максимум выражения (4) при условии (3), например, с помощью функции Лагранжа

$$L = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i\ , \tag{6}$$

где λ - неопределенный коэффициент,

мы придем к выводу, что все p_i равны между собой (это непосредственно вытекает из выражений вида

$$-\log_a p_i - 1 + \lambda = 0\ , \tag{7}$$

отражающих требование $\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$). Следовательно:

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1,n}\ . \tag{8}$$

Таким образом, при фиксированном n наибольшую меру неопределенности имеет система событий, в которой вероятности всех событий одинаковы. Но в этом случае мы как раз и оказываемся в ситуации полной неопределенности. Причем равные вероятности исходов появляются в соответствии с постулатом Байеса, который гласит, если вероятности явления неизвестны, то они должны приниматься за равные.

Подставляя (8) в (4), находим, что мера неопределенности полной системы событий в этом случае равна

$$H = \log_a n\ . \tag{9}$$

Данный результат означает, что в случае полной неопределенности, чем больше число событий в системе, тем больше мера неопределенности этой системы. Стало быть, введенная нами мера неопределенности может оказаться полезной при выборе из альтернативных вариантов и в случае "неизмеримой неопределенности".

Рассмотрим теперь строгое введение меры неопределенности (4).

Для того чтобы выяснить, что может служить мерой неопределенности системы (1), охарактеризуем каждый возможный результат финансовой операции A_i его номером в двоичной системе счисления. Вспомним, что в данном случае всякое число z представимо в виде

$$z = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \ldots + a_k 2^k, \qquad (10)$$

где каждое из чисел a_0, a_1, ..., a_k может быть равно единице или нулю. Число z вполне определяется в двоичной системе последовательностью чисел a_0, a_1,..., a_k совершенно так же, как в десятичной системе всякое число вполне определяется последовательностью десятичных цифр, показывающих, сколько в данном числе содержится единиц, десятков, сотен и т.д. Число $k + 1$ является числом двоичных знаков, которыми изображается число z.

Установим следующие правила нумерации возможных значений финансовой операции:

- равновероятные результаты опыта будем обозначать одним и тем же числом двоичных знаков;
- чем больше вероятность данного результата опыта, тем меньшим числом двоичных знаков будем стараться его обозначить.

Произвести нумерацию возможных результатов системы (1) в двоичной системе, руководствуясь перечисленными двумя правилами, можно, например, следующим образом. Разобьем все возможные значения A_i на две группы так, чтобы сумма вероятностей результатов, входящих в одну группу, была как можно ближе к 1/2. Всем результатам, входящим в одну группу, припишем первый двоичный знак 1, а всем результатам, входящим в другую группу, припишем первый двоичный знак 0. Для определения второго двоичного знака разобьем каждую из двух групп, в свою очередь, на две подгруппы так, чтобы сумма вероятностей значений исходов, входящих в каждую подгруппу, была как можно ближе к 1/4. Продолжая таким образом, мы получим после k разбиений такие группы, что сумма вероятностей входящих в каждую группу значений финансовой операции будет приблизительно равна 2^{-k}. Если после k разбиений в какой-либо из полученных групп окажется только один возможный результат, то дальнейшее разбиение этой группы будет невозможным, и мы выразим номер составляющего эту группу значения A_i полученным k-значным двоичным числом. Легко видеть, что если вероятность какого-нибудь возможного результата исхода равна 2^{-k}, где k - какое-нибудь целое положительное число, то его номер выразится k-значным двоичным числом. Для того чтобы понять, как можно измерить неопределенность результата рассматриваемой рисковой ситуации, предположим: вероятности всех возможных исходов выражаются числами 2^{-m_i} (i =1,..., n), где m_1,...,m_n - целые положительные числа, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-m_i} = 1\,. \qquad (11)$$

Тогда номер результата исхода, вероятность которого равна 2^{-m_i}, выразится m_i-значным двоичным числом. При таком способе нумерации количество двоичных знаков (в том числе которым придется зарегистрировать полученный результат исхода, чтобы полностью определить его) можно рассматривать как случайную величину с возможными значениями m_1,...,m_n, вероятности которых равны соответственно 2^{-m_1},..., 2^{-m_n}. Естественно попытаться принять за меру неопределенности рассматриваемой рисковой ситуации математическое ожидание числа двоичных знаков, необходимых для того, чтобы полностью определить результат этого опыта, т.е. величину

$$H = m_1 2^{-m_1} + m_2 2^{-m_2} + \\ + \ldots + m_n 2^{-m_n}. \qquad (12)$$

Совершенно так же можно определить номера возможных результатов опыта в какой-нибудь другой, например, в a-ичной системе. Для этого следует разбить все возможные результаты опыта на a групп и каждой группе приписать одно из a возможных значений первого знака a-ичного числа. Затем каждую из групп разбить на a подгрупп, приписав каждой из подгрупп одно из a возможных значений второго знака a-ичного числа. Если вероятности всех возможных результатов опыта равны a^{-m_i} (i =1,..., N), где m_1,...,m_N - такие целые положительные числа, что

$$\sum_{i=1}^{N} a^{-m_i} = 1\,, \qquad (13)$$

то результат опыта, имеющий вероятность a^{-m_i}, получит номер, выражаемый m_i-значным числом в a-ичной системе счисления. Рассматривая число знаков в a-ичном числе, которым придется обозначить полученный результат опыта, чтобы полностью определить его как случайную величину, можно принять за меру неопределенности результата опыта математическое ожидание этой случайной величины:

$$H = m_1 a^{-m_1} + m_2 a^{-m_2} + \\ + ... + m_N a^{-m_N}. \quad (14)$$

Формулы (12) и (14) могут быть объединены формулой

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i, \quad (15)$$

аналогичной величине (4), где логарифмы следует взять при основании 2 в случае формулы (12) и при основании a в случае формулы (14).

Так как $\log_a u = \log_2 u \log_a 2$, то вопрос о выборе основания логарифмов является вопросом о единицах измерения неопределенности опыта. В случае формулы (12) неопределенность измеряется в двоичных знаках, а в случае формулы (14) - в a-ичных знаках.

Выбор основания логарифмов определяет единицу измерения энтропии. Для практических приложений удобно выражать энтропию через двоичные логарифмы. Единицей измерения энтропии в этом случае служит один двоичный знак. Эта единица имеет специальное название *бит.*

Заметим, что в общей теории единицы измерения безразличны, поэтому в дальнейшем можно считать, что в записи $\log p$ основание логарифмов равно некоторому положительному числу a: $\log p = \log_a p$.

Пример 1. Пусть в системе (1) рассматривается восемь возможных результатов финансовой операции с вероятностями 1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16. Тогда изложенный способ разбиения на группы и определения номера каждого исхода в двоичной системе можно представить следующей таблицей:

p_i	Двоичные знаки				Двоичный номер
	1-й	2-й	3-й	4-й	
1/4	1	1			11
1/4	1	0			10
1/8	0	1	1		011
1/8	0	1	0		010
1/16	0	0	1	1	0011
1/16	0	0	1	0	0010
1/16	0	0	0	1	0001
1/16	0	0	0	0	0000

Математическое ожидание количества двоичных знаков, необходимых для того, чтобы полностью определить неопределенность результата, в соответствии с формулой (12) равно

$$H = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + \\ + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{16} = 2\frac{3}{4} \text{ бит.}$$

Очевидно, тот же самый результат будет получен и при использовании формулы

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i. \quad (16)$$

Легко убедиться, что в случае полной неопределенности в условиях примера 1, т.е. если вероятности всех восьми возможных исходов финансовой операции равны друг другу, мы получим меру неопределенности данной ситуации равной

$$H = 8 \cdot 3 \cdot 1/8 = 3 \text{ бит.}$$

Пример 2. Акции фирм ***A*** и ***B*** по-разному чувствительны к рыночной конъюнктуре. Прогнозируемые доходности по акциям фирмы ***A*** и ***B*** и соответствующие распределения вероятностей по оценкам экспертов имеют следующие значения:

$p(A_i)$	Доходность акций A_i, %
0,20	19
0,65	16
0,10	9
0,05	-3

$p(B_i)$	Доходность акций B_i, %
0,25	20
0,50	10
0,25	20

Акциям какой фирмы следует отдать предпочтение?

Традиционный подход, когда лицо, принимающее решение, опирается на ожидаемую доходность и меру риска в виде среднего квадратического (стандартного) отклонения, дает следующие результаты:

$$\mu_A = 0{,}20 \cdot 19 + 0{,}65 \cdot 16 + \\ + 0{,}10 \cdot 9 + 0{,}05 \cdot (-3) = 14{,}95;$$

$$\sigma_A = \sqrt{0{,}20 \cdot (19 - 14{,}95)^2 + \\ + 0{,}65 \cdot (16 - 14{,}95)^2 + 0{,}10 \times \\ \times (9 - 14{,}95)^2 + 0{,}05 \times \\ \times (-2 - 14{,}95)^2} = 4{,}86;$$

$$\mu_B = 0{,}25 \cdot 20 + 0{,}50 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 20 = 15;$$

$$\sigma_A = \sqrt{0{,}25 \cdot (20 - 15)^2 + \\ + 0{,}50 \cdot (10 - 15)^2 + \\ + 0{,}25 \cdot (20 - 15)^2} = 5.$$

По этим результатам трудно отдать предпочтение какому-либо из вариантов. Расчет коэффициентов вариации тоже мало проясняет картину:

$$CV_A = 0{,}325,\ CV_B = 0{,}333.$$

В данной ситуации следует принять во внимание меры неопределенности альтернативных вариантов ***A*** и ***B***, рассчитанные по формуле (16):

$$H_A = 1{,}4 \text{ и } H_B = 1{,}5.$$

Теперь, поскольку мера неопределенности (энтропия) акций фирмы ***B*** оказалась больше, чем мера неопределенности акций фирмы ***A***, можно ожидать, что акции фирмы ***A*** предпочтительнее.

Вывод

Вводимое нами понятие и количественная характеристика ***"мера неопределенности"*** охватывает как ситуации риска, так и ситуации полной неопределенности. Показано, что в случае различных распределений вероятностей альтернативных рисковых вариантов мера неопределенности вкупе с традиционно применяемыми характеристиками может оказаться действенным аналитическим инструментом анализа.

Насколько известно автору, развиваемый нами подход в экономической литературе не встречается. В тех же случаях, когда все-таки говорится об "***измерении степени неопределенности***", речь на самом деле идет о вычислении математического ожидания и среднеквадратического отклонения (см., например[6]). Предлагаемый нами подход представляется более последовательным развитием идей Ф. Найта. В этом, на наш взгляд, заключается и методологическая целесообразность: если есть возможность ввести количественную меру неопределенности, то уже недопустима существующая путаница в понятиях "неопределенность" и "риск".

Выражения (4) и (15) для меры неопределенности полной системы событий по структуре совпадают с выражением для энтропии физических систем. Если объем физической системы мысленно разбит на элементарные объемы и вероятность состояния, в котором находится i-й элементарный объем, равна p_i, то выражение (4) определяет энтропию физической системы. Энтропия характеризует меру хаоса, меру неупорядоченности физической системы. В этом понятии можно усмотреть определенную аналогию с мерой неопределенности полной системы событий. Поэтому наряду с выражением "мера неопределенности", возможно, целесообразно употреблять выражение ***"энтропия рисковой ситуации"*** или ***"энтропия ситуации полной неопределенности".***

---

[1] В частности, учет этих факторов может существенно повлиять на стимулы ведения бизнеса и его стоимость. Так, в 1999 г. 5%-ный пакет швейцарской АЭС в Лейбштадте (Швейцария) был передан другому инвестору с доплатой в 60 млн. евро, что являлось отражением высокого (по оценке участников сделки) атомного риска (Neue Zürcher Zeitung. 1999. 29 Dec. S. 19).

[2] "Теоретики, занимающиеся вопросами принятия решений, часто проводят различия между понятиями "риск" и "неопределенность". О ***риске*** говорят в ситуации, когда существует несколько возможных исходов и имеется релевантный прошлый опыт, позволяющий возможные исходы обработать статистически. ***Неопределенность*** проявляется в том случае, когда есть несколько возможных исходов, но предыдущих статистических данных мало, и это не позволяет предсказать возможные исходы. Большинство решений в бизнесе можно отнести именно к категории неопределенности. Однако при проведении анализа описанная разница между риском и неопределенностью большого значения не имеет, и потому в этой книге будем пользоваться этими терминами как синонимами". (*Друри К.* Управленческий учет для бизнес-решений: пер. с англ. М., 2003. С. 264). "Таким образом, несмотря на очень близкие смысловые значения слов "риск" и "неопределенность", их иногда разделяют, хотя это в значительной мере вопрос соглашения о терминологии" (*Чернова Г.В., Кудрявцев А.А.* Управление рисками: учеб. пособие. М., 2003.С. 11).

[3] См.: *Друри К.* Указ. соч. С. 264; *Чернова Г.В., Кудрявцев А.А.* Управление рисками: учеб. пособие. М., 2003. С. 11.

[4] *Knight F.H.* Risk, Uncertainty and Profit. Boston, 1921.

[5] *Найт Ф.Х.* Риск, неопределенность и прибыль: пер. с англ. М., 2003.

[6] См.: *Друри К.* Указ. соч. С. 267; *Сио К.К.* Управленческая экономика: пер. с англ. М., 2000. С. 115.

Поступила в редакцию 04.04.2011 г.