Макромодели развивающихся экономических систем

© 2010 С.Г. Караткевич
кандидат экономических наук
член совета директоров ООО «Технопарк "Дубна"»
руководитель центра разработки
и внедрения интеллектуальных систем управления ОАО "НИИАС"
© 2010 В.Н. Добрынин
кандидат технических наук, профессор
Международный университет природы, общества и человека "Дубна",
Институт системного анализа и управления, г. Дубна
E-mail: mail@ntpdubna.ru, arbatsolo@yandex.ru

В статье рассматривается метод построения модели экономической системы, основанный на использовании понятия производственной функции (ПФ), дается определение ПФ, описываются ее основные свойства и характеристики. Предлагается использовать ПФ как основу для разработки информационной технологии анализа сложных отраслевых систем.

Ключевые слова: экономические системы, макромодели, производственная функция, ресурсы, эластичность замещения системы, функция Кобба - Дугласа, функция Солоу, агрегированные модели.

К традиционным методам моделирования экономических систем относятся макромодели[1]. Во многих моделях в качестве основы используется понятие производственной функции.

Производственная функция (ПФ) показывает, как зависит выпуск продукции от затрат различных видов ресурсов при заданной технологии[2].

В агрегированных моделях верхнего уровня обычно в качестве ресурсов выбирают два вида: основные фонды системы, ресурсы живого труда (рабочая сила).

Производственная функция, устанавливающая эту взаимосвязь (рис. 1), имеет вид

$$Y = F(K, L),$$

где Y - выход (валовой продукт) системы;

K - объем основных фондов;

L - объем живого труда (рабочая сила).

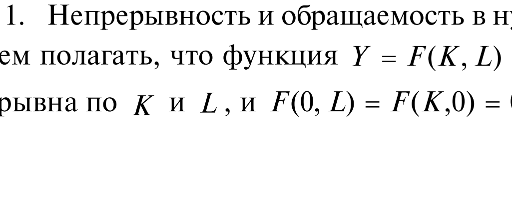

***Рис. 1.* Производственная функция**

Рассмотрим общие свойства производственной функции:

1. Непрерывность и обращаемость в нуль. Будем полагать, что функция $Y = F(K, L)$ непрерывна по K и L, и $F(0, L) = F(K,0) = 0$.

2. Аддитивность ПФ. Будем полагать, что $F(L_1 + L_2, K_1 + K_2) \ge F(L_1 + L_2) + F(K_1 + K_2)$, т. е. объединение усилий двух систем дает результаты, по крайней мере, не худшие, чем результаты каждой системы в отдельности. Условие аддитивности оказывается несправедливым, если имеются ограничения на "дефицитность" факторов, которые не учитываются в аналитическом выражении ПФ, но влияют на выпуск.

3. Также будем полагать, что ПФ обладает свойством делимости: $F(\frac{L}{n}, \frac{K}{n}) \ge \frac{1}{n} F(L, K)$, где n - целое положительное число. Эта формула иногда справедлива для крупных систем, а внутри какой-либо конкретной системы (предприятия, объединения) может быть несправедлива.

Все эти свойства естественные, вытекающие из здравого смысла. Рассмотрим математические свойства производственной функции.

4. ПФ - монотонно возрастающая функция: $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$.

5. ПФ дважды дифференцируема, с убывающими темпами роста: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} > 0$.

Теперь рассмотрим характеристики, определяющие ПФ. К ним можно отнести:

1. Коэффициенты эластичности выхода системы по входным ресурсам:

$$\alpha = \frac{\partial Y}{Y} \div \frac{\partial K}{K} = \frac{\partial Y}{\partial K} \div \frac{K}{Y}, \quad \beta = \frac{\partial Y}{Y} \div \frac{\partial L}{L} = \frac{\partial Y}{\partial L} \div \frac{L}{Y}.$$

Коэффициенты α и β показывают, на сколько процентов изменится валовой продукт системы Y, если объем соответствующего ресурса (фактора) увеличить на 1%. Ясно, что производственная функция предполагает множество способов производства эмбинаций чисел (K, L), при каждом из которых можно получить заданную величину Y.

2. Эластичность замещения системы.

Прежде чем вводить понятие общей эластичности системы, введем понятие предельной нормы замещения ресурсов:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0.$$

Предположим, что выход задан постоянными, т.е. $Y = const$, тогда $\frac{\partial F}{\partial K} dK = -\frac{\partial F}{\partial L} dL$, следовательно, норма замещения ресурсов будет равна $S = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial L / \partial K}$. Эта формула показывает взаимосвязь между ресурсами K и L. Знак "-" означает, что с увеличением K L должно убывать, чтобы обеспечить постоянный выпуск системы.

Эластичность замещения системы определяется так:

$$\sigma = \frac{\partial (K/L)}{(K/L)} \div \frac{\partial S}{S} = \frac{\partial (K/L)}{\partial S} \cdot \frac{S}{(K/L)}.$$

Для того чтобы оперировать данным выражением, введем дополнительные обозначения: $k = \frac{K}{L}$ - фондовооруженность труда, $z = \frac{Y}{K}$ - фондоотдача, $y = \frac{Y}{L}$ - производительность труда. Тогда эластичность замещения системы определится так:

$$\sigma = \frac{\partial k}{\partial S} \cdot \frac{S}{k}.$$

Следовательно, эластичность системы показывает, на сколько процентов надо изменить фондовооруженность системы при сохранении постоянного выпуска, чтобы предельная норма замещения изменилась на 1 %.

3. Однородность производственной функции:

$$F(\lambda K, \lambda L) \geq \lambda F(K, L) \text{ при } \lambda > 0.$$

Из условий однородности, согласно теореме Эйлер, имеем:

$$Y = \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L,$$

где $r = \frac{\partial F}{\partial K}$ и $\omega = \frac{\partial F}{\partial L}$ - предельные производительности факторов производства.

Выразим эти показатели через приведенные характеристики Y, K и L:

$$r = \frac{\partial F}{\partial K} = F(K, L) \to f(k), \quad F(K, L) = Lf(k),$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} Lf(\frac{K}{L}) = \frac{\partial}{\partial (K/L)} f(\frac{K}{L}),$$

$$r = \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial k}, \quad r = fk;$$

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left[Lf\left(\frac{K}{L}\right)\right] = f\left(\frac{K}{L}\right) + L \frac{\partial}{\partial L} f\left(\frac{K}{L}\right) =$$

$$= f(k) + L\left(-\frac{K}{L^2}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial L} = f(k) - \frac{K}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial L} f\left(\frac{K}{L}\right),$$

$$\omega = f(k) - k \frac{\partial}{\partial K} f(k);$$

$$S = \frac{\omega}{r} = \frac{f(k) - kf'k}{f'k} = \frac{f}{f'k} - k.$$

Теперь выведем формулу для эластичности замещения:

$$\sigma = \frac{\partial k}{\partial S} \cdot \frac{S}{k} = \frac{\partial k \left(\frac{f}{f_k'} \right)}{\partial ((f / f_k') - k)^k} = \frac{\frac{f}{f_k'} - 1}{\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{f}{f'} - k \right)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{f}{f_k' \cdot k}}{\frac{f \cdot f_k'' \cdot k}{f^{12} k}} = \frac{(kf_k' - f) \cdot f_k'}{\left(k \cdot \frac{f'}{k} \right) \cdot f \cdot f_k'' \cdot k} = \frac{f_k'(kf_k' - f)}{k \cdot f_k'' \cdot k \cdot f},$$

$$\sigma = \frac{f_k (k' f_k' - f)}{kf_k'' k \cdot f}. \qquad (1)$$

Соотношение (1) - общее дифференциальное уравнение для определения производственной функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в качестве основы для получения различных видов производственных функций (рис. 2). Для этого перепишем его в более удобной форме:

$$\sigma_k ff'' - kf'^2 + ff' = 0\,. \qquad (2)$$

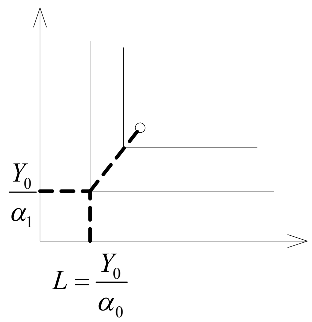

Рис. 2. **Графическое изображение производственной функции**

1. Производственная функция Леонтьева

а) $\sigma = 0$; $-kf'^2 + ff' = 0$; $f' \to f\alpha_0$;

б) $-kf' + f = 0 \to \dfrac{df}{f} = \dfrac{dk}{k} \to \alpha k$.

При переходе к абсолютным переменным получим:

$$Y = Lf = \alpha_0 L\,,\ Y = Lf = \alpha_1 L\frac{K}{L} = \alpha_1\,,$$

т.е.

$$\begin{cases} L = \alpha \cdot Y; \\ K = \beta \cdot Y. \end{cases}$$

Найдем уравнение изоквант в случае, когда ПФ $Y = const = Y_0$:

$$\begin{cases} L = Y_0 / \alpha_0; \\ K = Y_0 / \alpha_1. \end{cases}$$

2. Производственная функция Кобба - Дугласа.

Рассмотрим вначале общий случай, когда $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$. Для решения уравнения (2) сделаем следующую замену переменных:

$$k = e^u;\ dk = du e^u \Rightarrow \frac{du}{dk} = e^{-u};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} = \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right) = e^{-u}\frac{du}{dk} = e^{-2u}\,.$$

Выразим производные с помощью новой переменной:

$$\frac{df}{dk} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dk} = f'_u e^{-u}\,,$$

$$\frac{d^2 f}{dk^2} = \frac{d}{dk}\left(\frac{df}{dk}\right) = \frac{d}{dk}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dk}\right) =$$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dk}\right)\frac{du}{dk} = \left[\frac{d^2 f}{du^2}\cdot\frac{du}{dk} + \frac{df}{du}\cdot\frac{d^2 u}{dk^2}\cdot\frac{dk}{du}\right]\frac{du}{dk} =$$

$$= f''_u\left(\frac{du}{dk}\right) + f'_u\frac{d^2 u}{dk^2} = f''_u e^{-2u} + f'_u(-e^{-2u}) =$$

$$= e^{-2u}(f''_u - f'_u)\,,$$

т. е.

$$\frac{d^2 f}{dk^2} = e^{-2u}(f''_u - f'_u)\,.$$

Подставим теперь выражения для первой и второй производных в уравнение (2):

$$\sigma e^u f e^{-2u}(f''_u - f'_u)^{-e^u} f'^2_u e^{-2u} + f\cdot f_u e^{-u} = 0\,,$$

$$\sigma f e^{-u}(f''_u - f'_u) - f'^2_u e^{-u} + f\cdot f'_u e^{-u} = 0\,.$$

Сократим и получим:

$$\sigma f f''_u - \sigma f f''_u - f'^2_u + f f'_u = 0\,.$$

Сделаем еще одну замену переменных:

$$\frac{dy'}{du} = \frac{dP}{du} = \frac{dP}{dY}\cdot\frac{dY}{dy}y' = \frac{dP}{dy}P = \frac{dy'}{dY}P\,,$$

$$\sigma f\cdot P\frac{dP}{dy} + (1+\sigma)fP - P^2 = 0\,,$$

$$\sigma f\cdot\frac{dP}{dy} + (1+\sigma)f - P = 0\,.$$

Теперь данное уравнение нужно свести к полным дифференциалам, для чего можно воспользоваться методом интегрирующего множителя:

$$\sigma y\frac{dP}{dy} + (1-\sigma)y - P = 0\,.$$

Применив интегрирующий множитель, получим уравнение в полных дифференциалах, решение которого представляется в виде $P = y + cy^{1/\sigma}$. Подставим в это уравнение значение P и получим: $\dfrac{dy}{du} = y + cy^{1/\sigma}$. Возможны два случая:

а) $\sigma = 1$; $\dfrac{dy}{du} = (1+c)$; $y = c_1 e^{(1+c)u}$;

$$\frac{dy}{y} = (1+c)du;$$

$$d(\ln y) = (1+c)du \Rightarrow d(\ln f) = (1+c)\ln k;$$

$$f = c_2 k^{1+c};$$

$$F = Lf = cL\left(\frac{K}{L}\right)^{1+c} = c_2 K^{1+c} L^{-c}$$

или $F = c_2 + K^{\alpha} L^{1-\alpha}$;

т. е. получаем функцию Кобба - Дугласа. Обобщение производственной функции Кобба - Дугласа - функция Солоу: $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}S^{\gamma}R^{\mu}$, где α, β, γ и μ - константы.

б) Теперь рассмотрим более сложный случай: $\sigma \neq 1$; $du = \left(\frac{du}{dk}\right) \cdot dk = e^{-u}dk$;

$k\frac{du}{dk} = y + cy^{1/\sigma}$; $\frac{dy}{du} = y + cy^{1/\sigma}$ - это уравнение Бернулли. Но это уравнение легко интегрируется:

$$\frac{du}{y + cy^{1/\sigma}} = \frac{dk}{k}.$$

Решение в неявном виде будет выглядеть следующим образом:

$$y = 1 - \frac{1}{\sigma} - a_0 k^{1-1/\sigma} = a_1,$$

где a_0 и a_1 - константы.

Для получения производственной функции произведем замену переменных $k = K/L$, $y = F/L$ и получим:

$$\frac{F^{1-1/\sigma}}{L^{1-1/\sigma}} - a_0\left(\frac{K}{L}\right)^{1-1/\sigma} = a_1.$$

Обозначим $1 - \frac{1}{\sigma} = -\rho$ и получим: $\frac{F^{-\rho}}{L^{-\rho}} - a_0\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho} = a_1$, откуда $F = (a_0 K^{-\rho} + a_1 L^{-\rho})^{-1/\sigma}$. Полученная функция - это производственная функция с постоянной эластичностью замены (ПЭЗ).

Обобщением для функции ПЭЗ на случай n переменных служит производственная функция Удзавы:

$$Y = A(\alpha_1 X_1^{-\beta} + \alpha_2 X_2^{-\beta} + ... + \alpha_n X_n^{-\beta})^{-1/\beta},$$

где α_1, α_2, ..., α_n - константы;

$\sigma = \frac{1}{1+\beta}$ - эластичность замещения системы.

В последнее время наблюдается тенденция построения агрегированных моделей сложных экономико-организационных систем на основе теории производственных функций.

Производственная функция обобщенно отражает зависимость затрат выпуска системы Y от затрат на основные фонды K и живую силу L, т. е. является классической моделью: “затраты (ресурсы) - выпуск (продукции)”. Теория производственных функций представляет собой аксиоматически обоснованное, сложившееся математическое направление. При исследовании отраслевых систем часто требуется детализация затрачиваемых ресурсов, влияющих на выпуск. Уровень детализации таков, что в качестве ресурсов выступают не более трех-четырех переменных, в связи с чем получаемые модели тоже относятся к классу агрегированных. Однако они не носят универсального характера и, строго говоря, не являются в классическом смысле слова производственными функциями. Тем не менее, исследование таких агрегированных моделей, например моделей в различных отраслях промышленности, показывает, что по своим аналитическим свойствам они подобны производственным функциям и, следовательно, для их расчетов может использоваться хорошо отработанный аппарат теории производственных функций[3]. Кроме того, вышеописанный аппарат является основой для создания компьютерных аналитических систем для решения задач анализа (ретрогноз, диагноз, прогноз) и синтеза отраслевых систем на основе моделирования.

---

[1] См.: *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Законы истории. Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура. 2-е изд. М., 2007; *Кондратьев Н., Яковец Ю., Абалкин Л.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения: Избр. тр. М., 2002; *Аткинсон Э., Стиглиц Д.* Лекции по экономической теории государственного сектора экономики. М., 1995.

[2] См.: *Кремер Н.* Высшая математика для экономистов. М., 1997; *Лукашин Ю.* Производственные функции в анализе мировой экономики // Мировая экономика и международные отношения. 2004. № 1. С. 17-27; *Шадрин А.А.* Теоретический подход и особенности моделирования производственной функции предприятия в условиях неопределенности товарных, финансовых и сырьевых рынков // Менеджмент в России и за рубежом. 2009. № 6. С. 3-8.

[3] *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Указ. соч.

Поступила в редакцию 01.11.2010 г.