

## Экономико-математическая модель заключения договоров между покупателями и продавцами

© 2010 В.Г. Росс

кандидат экономических наук

заместитель начальника отдела контроля и одобрения кредитных рисков  
ОАО "ОТП Банк"

© 2010 А.В. Аполонин

Всероссийский НИИ проблем вычислительной техники и информатизации  
E-mail: ross@pvti.ru

В статье формулируется задача заключения договоров, которая является типичной как в бизнесе, так и в политике. По своей математической природе эта задача обладает рядом характерных черт, которые придают ее математической формулировке глубокое своеобразие. Рассматривается технология сведения этой игровой задачи к Эволюционно-симулятивной модели.

*Ключевые слова:* заключение договоров, правила остановки, Эволюционно-симулятивная модель, издержки завышения, издержки занижения, знаковый граф, договорные позиции.

Задача заключения договоров типична, в том смысле, что заключение договоров является повсеместной практикой как в бизнесе, так и в политике. По своей математической природе эта задача является игровой и сводится к Эволюционно-симулятивной модели<sup>1</sup>. Вместе с тем задача обладает рядом характерных черт, которые придают ее математической формулировке глубокое своеобразие. В частности:

- договорные позиции по-разному влияют на хозяйственные (или политические) ситуации для каждой из договаривающихся сторон;
- издержки завышения и издержки занижения в явном виде не зависят от PL - искомого равновесного значения утверждаемого показателя (договорной позиции);
- расчетные показатели зависят от совместных с оптимумом реализаций факторов.

Рассмотрим общую структурную формулировку задачи заключения договоров и технологию ее решения в среде модуля Equilibrium инструментальной системы Decision<sup>2</sup>.

Обратимся вначале к общей структурной формулировке задачи заключения договоров между двумя участниками<sup>3</sup>. Пусть имеется две договаривающиеся стороны: "А" и "Б" - и пусть  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  - договорные позиции. Допустимые сочетания договорных позиций для "А" формируются с помощью имитационной модели  $\rho_A^U$ ,

т.е.:  $(X_1, \dots, X_n) = \rho_A^U(f_1, \dots, f_m) = \rho_A^U(e)$ , где  $f_{1,A}, \dots, f_{m,A}$  - факторы, определяющие условия заключения договоров и являющиеся случайными величинами,  $e$  - номер статистического испытания. Аналогичным образом, допустимые сочетания

договорных позиций для "Б" формируются с помощью имитационной модели  $\rho_B^U$ :

$$(X_1, \dots, X_n) = \rho_B^U(f_{1,B}, \dots, f_{m',B}) = \rho_B^U(e).$$

Поскольку договорные позиции взаимосвязаны, постольку, как правило, среди них можно выделить некую позицию  $X_k \in \{X_1, \dots, X_n\}$  и считать ее "основной" или "главной". С  $X_k$  так или иначе связаны все другие договорные позиции. В принципе, в качестве "основной" можно поочередно выбирать любую позицию.

Для "А" каждое сочетание позиций  $(X_1, \dots, X_n)$  создает ситуацию  $(Y_1^A, \dots, Y_m^A)$ , которую можно моделировать с помощью ориентированного, взвешенного знакового графа. При этом:

$$(Y_1^A, \dots, Y_m^A) = \rho_A^I(X_1, \dots, X_n), \text{ где } \rho_A^I - \text{имитационная модель. Ситуация } (Y_1^A, \dots, Y_m^A) \text{ для "А" ха-}$$

рактеризуется критерием  $K_A(Y_1^A, \dots, Y_m^A)$ , который является отображением области параметров в некую упорядоченную шкалу.

Аналогично для "Б". Каждое сочетание позиций  $(X_1, \dots, X_n)$  создает ситуацию  $(Y_1^B, \dots, Y_r^B)$ , которая также может моделироваться с помощью ориентированного, взвешенного знакового графа:  $(Y_1^B, \dots, Y_r^B) = \rho_B^I(X_1, \dots, X_n)$ . Ситуация  $(Y_1^B, \dots, Y_r^B)$  для "Б" характеризуется критерием

$K_B(Y_1^B, \dots, Y_r^B)$ , который, как и критерий  $K_A(Y_1^A, \dots, Y_m^A)$ , каждому набору параметров ситуации ставит в соответствие значение в упорядоченной шкале, которая, вообще говоря, отличается от шкалы значений  $K_A(Y_1^A, \dots, Y_m^A)$ .

Задача состоит в том, чтобы подобрать такие значения договорных позиций  $(X_1, \dots, X_n)$ , которые бы удовлетворяли минимаксному критерию, составленному из индивидуальных критериев "А" и "Б".

Пользуясь терминологией, принятой в Эволюционно-симулятивной методологии, а также перейдя к векторным обозначениям

$$\bar{X} = (X_1, \dots, X_n), \quad \bar{Y}^A = (Y_1^A, \dots, Y_n^A) \quad \text{и}$$

$$\bar{Y}^B = (Y_1^B, \dots, Y_r^B), \quad \text{можно записать:}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \rho_A^U(f_{A1}, \dots, f_{An}) = \rho_A^U(e) \\ Fa1 &= X_k; \quad k \in \{1, n\} \end{aligned} \right\} \text{- модель условий} \\ \text{завышения} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \rho_B^U(f_{B1}, \dots, f_{Bn}) = \rho_B^U(e) \\ Fa2 &= X_k; \quad k \in \{1, n\} \end{aligned} \right\} \text{- модель условий} \\ \text{занижения} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}^A &= \rho_A^I(\bar{X}) \\ F_1 &= \Psi_A(\bar{Y}^A) \end{aligned} \right\} \text{- модель издержек} \\ \text{завышения} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}^B &= \rho_B^I(\bar{X}) \\ F_2 &= \Psi_B(\bar{Y}^B) \end{aligned} \right\} \text{- модель издержек} \\ \text{занижения} \quad (4)$$

$$\min_{\lambda \in \{1, 2\}} \left\{ \max_{\bar{Y}} \left\{ F_\lambda(\bar{Y}^L) \right\} \right\} \text{- критерий оптимальности} \quad (5)$$

(из введенных обозначений следует, что при  $\lambda = 1$   $L = A$ , а при  $\lambda = 2$   $L = B$ ).

Формулировка (1) - (5) дает принципиальную возможность для решения задач оптимизации договоров с использованием модуля *Equilibrium* инструментальной системы *Decision*. Для практического решения подобной задачи необходимо построить ориентированные графы, описывающие условия принятия решений сто-

ронами, и на основе этих графов построить имитационные модели  $\rho_A^U$ ,  $\rho_B^U$ ,  $\rho_A^I$ ,  $\rho_B^I$  и функции  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$ . Этого достаточно, чтобы реализовать модель в *Equilibrium*<sup>4</sup>. Далее, выполняя диалоговую процедуру:

*Расчет*  $\rightarrow$  *Прямой/Обратный*  $\rightarrow$  *Прямой расчет*, можно найти согласованное значение "главной" договорной позиции  $Fa1 \approx Fa2 \approx X_k$  и соответствующие согласованные значения других договорных позиций или, что то же самое, остальных компонент вектора  $\bar{X}$ . При этом компоненты вектора  $\bar{X}$  (кроме  $X_k$ ) должны рассчитываться на основе совместных с оптимумом реализаций факторов (способ получения таких реализаций описан в работе<sup>5</sup>).

При многократном выполнении диалоговой процедуры "главная" договорная позиция  $X_k$  будет незначительно колебаться (в пределах допустимой погрешности), а прочие компоненты вектора могут изменяться достаточно сильно, каждый раз оставаясь внутренне согласованными. Последнее означает, что полученные в оптимизационном расчете компоненты вектора удовлетворяют системе приближенных равенств:

$$\left. \begin{aligned} \rho_A^U(e') &\approx \rho_B^U(e') \\ \Psi_A(\rho_A^I(\bar{X})) &\approx \Psi_B(\rho_B^I(\bar{X})) \end{aligned} \right\},$$

где  $e'$  - номер статистического испытания, в котором реализовалось оптимальное значение. Следовательно, многократные оптимизационные расчеты позволяют генерировать варианты согласованных договорных позиций.

С математической точки зрения модель (1) - (5) обладает следующими важными особенностями: модель издержек завывшения и модель издержек занижения в явном виде не зависят от  $PL$  - искомого равновесного (согласованного) значения основной договорной позиции, а зависят только от  $Fa_1$  и  $Fa_2$ , соответственно, а расчетные показатели, т.е. компоненты вектора  $\bar{X}$ , зависят от совместных с оптимумом реализаций факторов.

Проиллюстрируем некоторые основные положения рассмотренной технологии. Обратимся к примеру задачи заключения договора между авиаперевозчиком и поставщиком горюче-смазочных материалов (ГСМ).

Авиакомпания "А" ведет переговоры с поставщиком ГСМ "Б" на предстоящий год по следующим договорным позициям:

$X_1$  - количество поставляемого авиационного керосина;

$X_2$  - цена керосина;  
 $X_3$  - количество поставляемого моторного масла;

$X_4$  - цена моторного масла;  
 $X_5$  - стоимость услуг по доставке ГСМ.

Для авиакомпании договорные позиции определяются следующими основными факторами:

$f_{A1}$  - ожидаемый объем авиаперевозок;

$f_{A2}$  -  
 $f_{A3}$  -  
 $f_{A4}$  - } - доли общей нагрузки по основ-

ным направлениям;

$f_{A5}$  - ожидаемый средний уровень цен на авиаперевозки.

Для поставщика ГСМ договорные позиции определяются иными факторами:

$f_{B1}$  - стоимость нефти;

$f_{B2}$  - цена керосина у конкурирующих поставщиков;

$f_{B3}$  - состояние производственных мощностей.

Не вдаваясь в детали, отметим, что нет каких-либо существенных видимых препятствий для построения имитационных моделей

$$\bar{X} = \rho_A^U(f_{A1}, \dots, f_{An}) = \rho_A^U(e) \text{ и}$$

$$\bar{X} = \rho_B^U(f_{B1}, \dots, f_{Bn}) = \rho_B^U(e).$$

В качестве "основной" выберем  $X_1$  - количество поставляемого авиационного керосина. Таким образом,  $k = 1$ .

Функциональный ориентированный знаковый граф, отражающий влияние договорных позиций на деятельность авиакомпании, показан на рис. 1.  $Y_1^A$  - доход авиакомпании,  $Y_2^A$  - доля, занимаемая на рынке авиаперевозок,  $Y_3^A$  - качество обслуживания пассажиров.

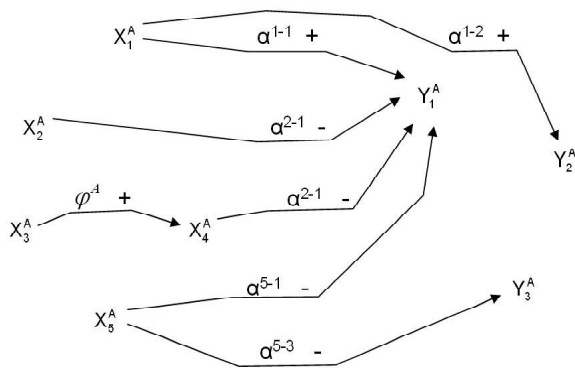


Рис. 1. Граф влияния договорных позиций на показатели деятельности авиакомпании

Влияние объема топлива на доход компании положительно, т.е. чем больше потребляется топлива, тем больше перевозок и больше доход. Эта зависимость, вообще говоря, нелинейна и отражается функцией  $\alpha^{1-1}$ . Доля на рынке так же зависит от объема топлива ( $\alpha^{1-2}$ ). Цена топлива, напротив, снижает доход (отрицательное влияние),  $\alpha^{2-1}$  - функция, отражающая это влияние.

Оценка договорных позиций для авиакомпании "А" происходит через сравнение вариантов сочетаний характеристик ее деятельности  $Y_1^A$ ,

$Y_2^A$  и  $Y_3^A$ . Поскольку эти величины непосредственно несопоставимы, необходимо отображение троек  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  в некоторую упорядоченную шкалу  $F_1$ , т.е.:  $\Psi_A(Y_1^A, Y_2^A, Y_3^A) \rightarrow F_1$ . Можно, в частности, конкретизировать содержание функции  $\Psi_A$  следующим образом:

$$F_1 = k + (Y_1^A)^{k_1} + (Y_2^A)^{k_2} + (Y_3^A)^{k_3}.$$

При этом  $F_1$  - балльная самооценка состояния авиакомпании.

Влияние договорных позиций на деятельность компании "Б" также описывается функциональным ориентированным знаковым графом.

Пусть  $Y_1^B$  - прибыль компании "Б",  $Y_2^B$  - имидж компании "Б".

Граф влияния договорных позиций на показатели деятельности компании "Б" показан на рис. 2. Смысл зависимостей в общих чертах состоит в следующем: цена керосина и количество поставляемого моторного масла в наибольшей мере влияют на прибыль компании, а объем поставляемого керосина, цена моторного масла и стоимость услуг по доставке прежде всего влияют на имидж компании. Здесь надо подчеркнуть, что рассматриваемый пример призван про-

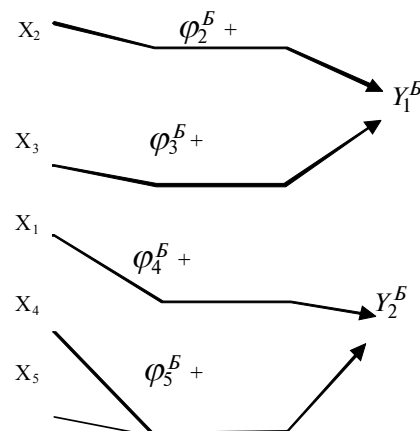


Рис. 2. Граф влияния договорных позиций на показатели деятельности поставщика ГСМ

иллюстрировать методические приемы построения графов и в остальном является условным. Для нас важно лишь то, что критерии деятельности договаривающихся сторон и графы влияния договорных позиций на эти критерии существенно различны.

Есть одно неперемное условие, при котором осуществление переговоров в принципе возможно, а именно: оценка качества принимаемых сторонами решений должна производиться в одной шкале. Это значит, что множество  $Q_A$  значений  $F_1$  и множество  $Q_B$  значений  $F_2$  должны совпадать, также должны совпадать элементы и способы упорядочения, иными словами, должно быть:  $Q_A = Q_B = Q$ .

Согласование позиций договаривающихся сторон

Участник	А	Б	В	...
А				
Б				
В				
...				

Если договаривающихся сторон больше двух, то, прежде всего, необходимо заполнить незакрашенные поля таблицы.

Таблица наглядно показывает, кто и с кем участвует в переговорах, а также в какой степени соглашения достигнуты. Знак “-” указывает на то, что клиенты непосредственно не участвуют в переговорах между собой; знак “U” указывает на то, что необходимо согласование решений; знак “+” указывает на то, что согласование уже достигнуто.

Задача (1) - (5) должна решаться для каждой пары договаривающихся сторон. Если при этом существует противоречие, например, между соглашением, достигнутым “А” с “Б”, и соглашением, достигнутым “А” с “С” по позициям  $X_i$ , то “А” вступает в дополнительные переговоры, ужесточая позиции по  $X_i$ , пока не будет достигнуто соглашение.

Рассмотрим еще одну задачу, имеющую практическое значение и вместе с тем отличающуюся математическим своеобразием. Задача, как и предыдущая, сводится к Эволюционно-симулятивной методологии (ЭСМ)<sup>6</sup> и поэтому может решаться с помощью модуля *Equilibrium* инструментальной системы *Decision*. Речь идет о задаче поиска оптимальных правил остановки. Такая задача возникает в случае, когда необходимо выполнять дорогостоящие эксперименты, каждый из которых приносит дополнительную информацию. Например, при поиске полезных ископаемых производят пробные бурения. С одной стороны, чем больше пробных буровых, тем больше информация о месторождении. С другой стороны, каждая буровая достаточно дорогостоящее инвестиционное вложение.

Математическая специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что риск завышения и риск занижения зависят от количества статистических испытаний  $N$ . При этом каждое статистическое испытание рассматривается как шаг, на котором можно остановить эксперимент.

Эволюционно-симулятивная модель приобретает в данном случае следующий вид:

$$Fa_1 = \rho_1(e) = e - \text{модель условий завышения} \quad (6)$$

$$Fa_2 = \rho_2(e) = e - \text{модель условий занижения} \quad (7)$$

$$F_1 = \rho_1(PL, Fa_1), PL > Fa_1 - \text{модель издержек завышения} \quad (8)$$

$$F_2 = \rho_2(PL, Fa_2), PL > Fa_2 - \text{модель издержек занижения} \quad (9)$$

$$\min_{\lambda \in \{1,2\}} \left\{ \max_{PL} \{ F_\lambda(PL, Fa_\lambda) \} \right\} - \text{критерий оптимальности,} \quad (10)$$

где  $e$  - номер статистического испытания;

$\rho_1(PL, Fa_1)$  - издержки от проведения дополнительного испытания;

$\rho_2(PL, Fa_2)$  - издержки от потери информации при недостаточном количестве экспериментов.

<sup>1</sup> Лихтенштейн В.Е., Росс Г.В. Информационные технологии в бизнесе. Применение системы Decision в микро- и макроэкономике. М., 2008.

<sup>2</sup> См.: Лихтенштейн В.Е., Росс Г.В. Информационные технологии в бизнесе. Применение системы Decision в микро- и макроэкономике; Их же. Информационные технологии в бизнесе. Применение системы Decision в решении прикладных экономических задач. М., 2009.

<sup>3</sup> Лихтенштейн В.Е., Росс В.Г. Оптимизация заключения договоров и поиск оптимальных правил остановки // Прикладная информатика. 2010.

<sup>4</sup> Там же.

<sup>5</sup> Лихтенштейн В.Е., Росс Г.В. Информационные технологии в бизнесе. Применение системы Decision в решении прикладных экономических задач. Прил. 7.

<sup>6</sup> Лихтенштейн В.Е., Росс Г.В. Информационные технологии в бизнесе. Применение системы Decision в микро- и макроэкономике.

Поступила в редакцию 09.08.2010 г.