Моделирование задачи стимулирования в многоэлементных организационных системах

© 2009 А.Э. Добрянин, Д.Г. Гришанов, С.А. Кирилина

Рассматриваются механизмы стимулирования в многоэлементных системах с независимыми, слабозависимыми агентами с учетом ограничений на фонд стимулирования. Определены параметры функции стимулирования, обеспечивающие согласованное взаимодействие между агентами и центром.

Ключевые слова: предприятие, управление персоналом, стимулирование, производительность труда, многоэлементная система, целевая функция, центр, агенты, оптимальное решение.

Рассмотрим многоэлементную систему (см. рисунок).

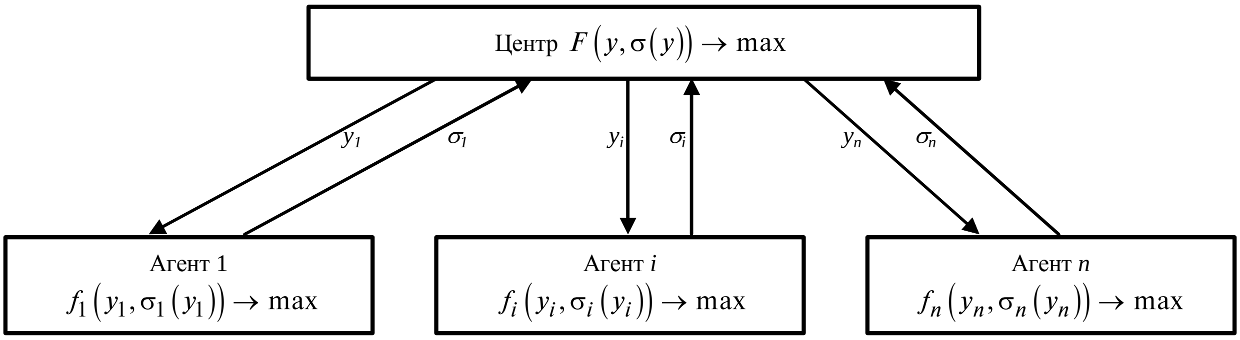

***Рис.* Задача стимулирования в многоэлементной системе**

Состав данной системы: центр и n агентов. Структура изображена на рис. 1. Множество допустимых действий - положительная полуось $y > 0$. Центр имеет информацию о том, какие действия агент может выбрать, и о целевой функции агента.

Агенты знают выбранную центром систему стимулирования.

Целевая функция i-го агента:

$$f_i\left(y_i\right)=\sigma_i\left(y_i\right)-c_i\left(y_i\right)\to\max ,$$

где $\sigma_i\left(y_i\right)$ - функция стимулирования i-го агента;

$c_i\left(y_i\right)$ - затраты i-го агента.

Целевая функция центра:

$$F_i\left(y_i\right)=H\left(y\right)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\left(y_i\right)\to\max,$$

где $H(y)$ - доход центра, который зависит от действий всех агентов $y = (y_1,..., y_n)$;

$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\left(y_i\right)$ - суммарные затраты центра на стимулирование.

Рассмотрим системы, в которых агенты независимы друг от друга. Системы, в которых стимулирование и заработная плата каждого агента зависят только от его собственных действий, называются системами с независимыми агентами.

Модель задачи стимулирования для систем с независимыми агентами имеет вид

$$\begin{cases} H\left(y^*\right)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\left(y^*_i\right)\to\max, & (1)\\ y^*_i=\arg\max\left\{\sigma_i\left(y_i\right)-c_i\left(y_i\right)\right\},\ \ i=1,...,n, & (2)\\ \sigma_i\left(y^*_i\right)-c_i\left(y^*_i\right)\ge U. & (3)\end{cases}$$

Формула (1) выражает стремление центра максимизировать разницу между доходом и суммой затрат на стимулирование, которая зависит от выбора i-м агентом действий y^*_i . Формула (2) отражает интересы i-го агента, который выбирает действие y_i, стремясь максимизировать свою целевую функцию. Ограничение (3) учитывает альтернативные возможности получения заработной платы i-го агента.

В практической деятельности организаций, как правило, существует ограничение на суммарное стимулирование. Системы, в которых вознаграждение и затраты каждого агента зависят только от его собственных действий и при этом существует ограничение на суммарное стимулирование агентов, называются системами со слабо связанными агентами.

Модель задачи стимулирования для системы со слабо связанными агентами:

$$\begin{cases} H\left(y^*\right) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\left(y^*_i\right) \to \max, & (4) \\ y^*_i = \arg\max\left\{\sigma_i\left(y_i\right) - c_i\left(y_i\right)\right\},\ i = 1,\dots,n, & (5) \\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\left(y^*_i\right) \le R, & (6) \\ \sigma_i\left(y^*_i\right) - c_i\left(y^*_i\right) \ge U. & (7) \end{cases}$$

Условие (4) учитывает ограниченность фонда заработной платы R. Данная задача решается в два этапа. На первом этапе из выражения (5) определяется действие агента как аналитическая зависимость от параметров системы стимулирования центра. На втором этапе полученная аналитическая зависимость подставляется в формулу (4). Таким образом, получается задача условной оптимизации. Решая эту задачу методом Лагранжа, определяют параметры системы стимулирования.

Рассмотрим задачу стимулирования с квадратичной функцией затрат агентов и пропорциональной системой стимулирования. Руководитель (центр) поручает работу бригаде, состоящей из n-агентов. Центр использует пропорциональную систему стимулирования

$$\sigma_i\left(y_i\right) = \alpha_i y_i,$$

где α_i - ставка оплаты единицы, произведенной i-м агентом продукции.

Известна функция затрат каждого агента:

$$c_i\left(y_i\right) = \frac{y_i^2}{2r_i},$$

где r_i - коэффициент, который характеризует квалификацию i-го агента и переводит затраты в денежное выражение. Чем выше квалификация агента, тем меньше его усилия по производству продукции.

Известна рыночная цена, согласно которой предприятие оказывает услуги и выполняет работы по договору p, фонд заработной платы бригады R. Требуется определить параметры системы стимулирования α_i. Модель задачи стимулирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y^*_i\ p - \alpha_i y^*_i \to \max, & (8) \\ y^*_i = \arg\max\limits_{y_i \ge 0}\left\{\alpha_i y_i - \frac{y_i^2}{2r_i}\right\},\ i = 1,\dots,n, & (9) \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \le R. & (10) \end{cases}$$

Первый этап. Из выражения (9) определим реакцию агента. Для нахождения экстремума функции одной переменной продифференцируем функцию и приравняем к нулю:

$$\frac{df_i\left(y_i\right)}{dy_i} = \alpha_i - \frac{y_i}{r_i} = 0.$$

Из решения уравнения следует, что $y_i = \alpha_i r_i$. Объем произведенной продукции i-го агента прямо пропорционален ставке оплаты единицы продукции a, и квалификации r_i.

Второй этап. Подставим $y^*_i = \alpha_i r_i$ *в* выражение для целевой функции центра (8) и ограничение (9), получим следующую задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} F\left(\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i p - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 y_i \le R. \end{cases}$$

Для ее решения применим метод множителей Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L\left(\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i p - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i - \lambda\left[R - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i\right].$$

Найдем частные производные от функции Лагранжа по неизвестным:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = pr_i - 2\alpha_i r_i + 2\lambda\alpha_i r_i = 0,\ i = 1,\dots,n, & (11) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i = 0. & (12) \end{cases}$$

Вынесем в выражении (11) общий множитель за скобки:

$$2\lambda\alpha_i\left(\frac{p}{2\alpha_i} - 1 + \lambda\right) = 0.$$

Два множителя равны нулю, когда хотя бы один из них равен нулю. Первый множитель не может быть равен нулю из экономического смысла. Значит, нулю равен второй множитель:

$$\frac{p}{2\alpha_i} - 1 + \lambda = 0.$$

Решая уравнение, получаем

$$\alpha_i = \frac{p}{2\left(1 - \lambda\right)} = \alpha = const.$$

Из полученного уравнения следует, что параметры функций стимулирования для всех агентов одинаковы. Из ограничения (12) определяем параметр системы стимулирования:

$$\alpha = \sqrt{\frac{R}{\sum_{i=1}^{n} r_i}}.$$

Ставка оплаты единицы продукции прямо пропорциональна фонду заработной платы и обратно пропорциональна сумме квалификаций агентов.

Поступила в редакцию 07.10.2009 г.