Системные закономерности неравенства доходов населения

© 2009 Г.А. Грачев
Научно-исследовательский институт физики
Южного федерального университета, г. Волгоград

В статье предлагается однопараметрическая модель самоорганизующихся систем, обобщающая модель неравенства доходов населения В. Парето. Теоретически показано, что при естественном развитии социально-экономических систем 80% граждан имеют доход ниже среднего уровня, индекс Джини возрастает с ростом доходов населения. Приводится пример схемы прогрессивного налогообложения.

Ключевые слова: доходы, концентрация, неравенство, модель, самоорганизующаяся система, прогрессивный налог.

Социально-экономическое неравенство между членами общества возникает как следствие различия граждан по их способностям, по их имущественному наследству и другим не всегда явным причинам. Исследования В. Парето показали, что распределение доходов и богатства в обществе может быть крайне неравномерным, что, по общему мнению, было основной причиной социальных потрясений в конце XIX в. Напряжение в обществе также возникает и в случае уравнивания доходов населения, что в конце XX в. стало одной из причин реформирования командно-административной системы хозяйствования в странах СЭВ. В данной связи возникает вопрос: "В каких пределах должно находиться неравенство доходов населения, в рамках которых общество может сохранять устойчивое социально-экономическое развитие?" Однозначного ответа на него до сих пор нет.

В поисках ответа мы исходим из синергетического подхода, согласно которому общество является самоорганизующейся социально-экономической системой. При этом мы считаем, что социально-экономическая система устойчиво развивается только в том случае, если минимальный доход членов общества гарантирует им достойный уровень и качество жизни, естественное неравенство между членами общества при полном их равенстве перед законом не вызывает социально-экономической напряженности.

Для изучения системных закономерностей неравенства доходов населения используем ранговое распределение доходов, которое определим следующим образом. Пусть всего членов общества N, доход всего общества равен K. Обозначим w_n величину дохода n-го члена общества (1 $n \leq N$). Расположим всех членов общества в порядке убывания их доходов на отрезке [0,1], n-й член при этом будет находиться в точке $x_n = n/N$. Ранжированный ряд w_n будет представлять собой ступенчатую невозрастающую функцию, т.е. $w_n \geq w_k$, если $k>n$. Ширина ступенек растет с уменьшением доходов и определяется количеством членов общества, имеющих одинаковый доход.

Введем в рассмотрение безразмерные функции:

$$v_n = \frac{w_n}{K}, \quad S_n = \sum_{l=1}^{n} v_l . \qquad (1)$$

Функция S_n является возрастающей, т.е. $S_n > S_k$, если $k<n$; удовлетворяет граничным условиям $S_0=0$, $S_N=1$. Смысл этой функции: n-я часть наиболее богатых членов общества владеет S_n-й частью всего общественного дохода.

Аппроксимируем S_n дважды дифференцируемой неотрицательной возрастающей однопараметрической функцией $W(\tilde{a},x)$ (где $\tilde{a}$ - параметр, $0 \leq x \leq 1$), удовлетворяющей граничным условиям $W(\tilde{a},0)=0$, $W(\tilde{a},1)=1$. Используя $W(\tilde{a},x)$, построим дискретный ряд

$$f(\gamma, x_r) = W\left(\gamma, \frac{r}{N}\right) - W\left(\gamma, \frac{r-1}{N}\right). \qquad (2)$$

В результате получаем упорядоченный ряд элементов, у которого $f(x_r) > f(x_n)$, если $n>r$. *Функция $f(\tilde{a},x_r)$ называется ранговым распределением элементов системы.*

При $N>>1$, $f(\tilde{a},x)$ можно записать в виде:

$$f(\gamma, x) = W'(\gamma, x)\Delta x = \frac{W'(\gamma, x)}{N}. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что при $N>>1$ независимо от вида первообразной функции $W(\tilde{a},x)$ член общества, имеющий средний доход, находится в точке x_m, в которой производная функции $W(\gamma, x)$ равна 1. В этой же точке кривая $W(\tilde{a},x)$ находится на максимальном удалении от линии равномерного дохода населения $S(x) = x$.

Ранг элемента r означает, что N-r элементов системы имеют значение f меньше, чем у элемента с рангом r. Теоретическая вероятность того, что $f \le f_r$ (где f_r значение величины f с рангом r), равна:

$$F(f_r) = P(f \le f_r) = (N - r) / N = 1 - r / N. \quad (4)$$

Формально функцию плотности вероятности можно получить по формуле $p(f) = dF / df$. Однако для счетного количества элементов системы с ранговым распределением $f(x_r)$ она не имеет физического смысла, так как вероятность обнаружить любой доход из заданного множества доходов равна $1/N$.

Таким образом, интегральная функция $W(\tilde{a},x)$ полностью определяет все свойства системы и в этом смысле является первообразной функцией системы.

В своих исследованиях В. Парето аппроксимировал функцию распределения дохода гиперболой[1]:

$$F(f) = 1 - (f_0 / f)^{\frac{3}{2}}, \quad f \ge f_0, \quad (5)$$

где f_0 - минимальное значение f.

Соответствующее модели (5) ранговое распределение Парето может быть записано в виде:

$$f_r = C / r^{\mu}, \quad C = 1 / \sum_{n=1}^{N} n^{-\mu}, \quad (6)$$

где $\mu = 2/3$. При $N>>1$ $C \approx 1/(3N^{\frac{1}{3}})$.

В настоящее время степенной закон (6) широко используется в различных областях знания для аппроксимации ранговых распределений[2]. Одним из первых, кто поднял вопрос о корректности применения уравнения (6) для описания ранговых распределений систем, был Герберт Саймон. Решая задачу от обратного, он рассмотрел процесс написания текста как стохастический процесс, в котором вероятность появления определенного слова зависит от набора уже написанных слов. Исходя из общих предположений, Саймон построил уравнение и нашел его решение, которое асимптотически стремится к степенному распределению[3]. Таким образом, им было показано, что ранговые распределения систем только приближенно можно аппроксимировать степенными законами. Чаще всего такая аппроксимация возможна лишь в небольшой области средних значений рангов. Поэтому во многих работах предлагаются различные модификации степенных законов (например, распределение Вейбулла[4], Мандельброта[5] и др.). Уравнения для ранговых распределений строятся в них исходя из соображений наилучшей аппроксимации экспериментальных данных, так как теоретически вывести ранговые распределения систем также невозможно, как и многие фундаментальные законы физики (например, закон всемирного тяготения И. Ньютона).

Известно, что система эффективна, если для достижения цели она расходует минимум ресурсов (усилий). Исследования Ципфа[6] показали, что у систем, удовлетворяющих “закону наименьших усилий”, независимо от их природы, первообразная функция удовлетворяет приближенному неравенству $0{,}6 \le W(\gamma, 0{,}2) \le 0{,}8$.

Простая проверка показывает, что соответствующее требованиям задачи уравнение для первообразной функции можно записать в виде[7]:

$$W(\gamma, x) = \frac{1}{Q}\sqrt[3]{1 - (1 - \gamma x)^3}, \quad x \in [0,1], \quad (7)$$

где $Q = \sqrt[3]{1 - (1 - \gamma x)^3}$ - нормировочный множитель.

Действительно функция $W(\tilde{a},x)$ удовлетворяет граничным условиям $W(\tilde{a},0)=0$, $W(\tilde{a},1)=1$; $W(\tilde{a},x_2)>W(\tilde{a},x_1)$ при $x_2>x_1$; $W(\tilde{a}_2,x)>W(\tilde{a}_1,x)$ при $\tilde{a}_2>\tilde{a}_1$; $W''(\gamma, x) < 0$. Подставляя в (7) x=0,2, получаем $W(1{,}0{,}2) \approx 0{,}787$; $W(0{,}0{,}2) \approx 0{,}587$. Таким образом, модель (7) соответствует “закону наименьших усилий” Ципфа, так как для всех допустимых значений параметра $\tilde{a}$ выполняется неравенство:

$$0{,}587 \le W(\gamma, 0{,}2) \le 0{,}787. \quad (8)$$

Дифференцируя (7) по x, получаем:

$$W'(\gamma, x) = \frac{\gamma}{Q} \frac{(1 - \gamma x)^2}{\left(1 - (1 - \gamma x)^3\right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (9)$$

Решая уравнение $W'(\gamma, x) = 1$ относительно x, получаем $x_m \approx 1/3^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}2$. Из этого следует,

[1] *Pareto V.* Cours d’économic politique. Rouge, Lausanne et Paris, 1897.

[2] *Хайтун С.Д.* Наукометрия: Состояние и перспективы. М., 1983.

[3] *Simon H.A.* On a class of skew distribution // Biometrika. 1955. № 42(3/4). P. 425-440.

[4] *Laberrere J., Sonette D.* Stretched exponential distributions in nature and economy: “fat tails” with characteristic scales // Eur. Phys. J. 1998. V. 2. P. 525-539.

[5] *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. N.Y., 1977.

[6] *Zipf G. K.* Human behaviour and the principle of least effort. Cambridge (Mass.), 1949.

[7] *Грачев Г.А.* Моделирование “принципа Парето” // Развитие инновационного потенциала агропромышленного производства, науки и аграрного образования: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. / Донской ГАУ. П. Персиановкий, 2009. Т. 4. С. 32-35.

что *в рамках модели* (7) 80% *членов общества всегда имеют доход ниже среднего уровня. Доля приходящегося на этих членов общества всего общественного дохода в зависимости от значения параметра ã может составлять от* 20 *до* 40%.

Из (3), (7) видно, что f(ã,x) является монотонно убывающей функцией и, следовательно, существует обратная монотонно убывающая функция $x = f(\gamma, x)$. Решая уравнение (9) относительно x, получаем:

$$F(f) = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{f^{\frac{1}{2}}}{\left(\beta^{\frac{3}{2}} + f^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad \beta = \gamma/(NQ). \tag{10}$$

Сравним предлагаемую модель системы с моделью неравенства доходов населения В. Парето. На рис. 1 в двойном логарифмическом масштабе представлены ранговые распределения модели (7) для ã = 1 (тонкая линия) и Парето (толстая линия) для N = 1000. Из рис. 1 видно, что при ã = 1 существенным отличием рангового распределения модели (7) от рангового распределения Парето является более быстрое убывание значимости элементов системы при $r >> 1$. В области средних значений рангов ранговое распределение модели (7) можно лишь приближенно аппроксимировать гиперболой с показателем степени $\mu = 2/3$.

Пусть минимальный доход членов общества, установленный государством, равен w_{min}. Из (10) следует, что $F(v,\gamma) \ge 0$ при выполнении неравенства:

$$\frac{w_{\min}^{\frac{1}{2}}}{\left((\overline{w}\beta)^{\frac{3}{2}} + w_{\min}^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} \ge 1 - \gamma, \tag{11}$$

где $\overline{w} = K/N$ - среднедушевой доход членов общества.

Из (11) видно, что при ã = 1 w_{min} = 0. Это означает, что при ã = 1 государство полностью устраняется от распределительных механизмов, ориентированных на устойчивое развитие общества, не гарантируя своим гражданам даже физического прожиточного минимума. Таким образом, у социально ориентированных государств по определению ã < 1.

Используя $W(\gamma, x)$, индекс Джини можно вычислить по формуле

$$J = 2\int_0^1 W(\gamma, x)dx - 1. \tag{12}$$

Подставляя (7) в (12), получаем:

$$\lim_{\gamma\to 0} J = 0{,}5, \quad \lim_{\gamma\to 1} J = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)}{3\Gamma\left(1+\frac{2}{3}\right)} - 1 \approx 0{,}766,$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

С точностью до членов второго порядка малости приближенное выражение для индекса

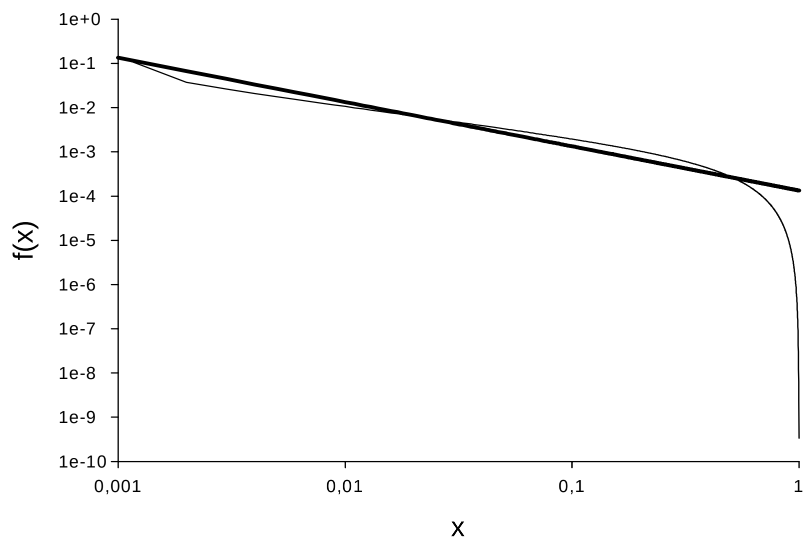

Рис. 1. **Ранговые распределения Парето (толстая линия) и модели (8) (тонкая линия)**

Джини можно вычислить по формуле $J(\gamma) \approx 0{,}5 + 0{,}266\gamma$.

Таким образом, в рамках модели (8) социально-экономическая система устойчива при выполнении следующих условий:

$$\gamma < 1, \quad 0{,}5 < J \le 0{,}766. \qquad (13)$$

Из неравенства (11) следует, что с ростом среднедушевого дохода (при фиксированном значении w_{min}) индекс Джини должен увеличиваться.

Отметим, что полученный результат расходится с устоявшимся мнением о том, что социально-экономическая система устойчива только в том случае, если индекс Джини находится в интервале 0,2 - 0,3. В качестве контраргумента можно вспомнить, что в странах СЭВ индекс Джини был равен 0,2 - 0,25, однако это не спасло командно-административную систему управления экономикой данных стран от краха. С точки зрения рассматриваемой модели, необходимым условием для развития системы является правильное определение минимального дохода, необходимым и достаточным - правильное определение минимального дохода и распределение доходов с учетом естественного неравенства граждан.

ни наблюдается в большинстве экономически развитых странах. По оценкам специалистов предполагается, что в ближайшей перспективе среднее для мира значение индекса Джини будет между 0,56 - 0,66[8], что хорошо согласуется с неравенством (13).

Отметим, что для вычисления индекса Джини на практике используются квантильные группы и формула трапеций[9]. Простой численный эксперимент показывает, что в случае 5 квантильных групп полученное с помощью метода трапеций значение индекса Джини в 1,3 меньше аналитического. Соответствующая поправка к значению индекса Джини США дает значение J=0,6, что полностью соответствует модели (7). При этом параметр $\tilde{a} \approx 0{,}38$.

Определим условно оптимальное для социально-экономической системы значение индекса Джини. При этом будем исходить из того, что в развитых странах бедными считаются те члены общества, чей доход в 2 раза меньше среднедушевого дохода. Заменяя в (11) знак неравенства на знак равенства и полагая $w_{\min} = \overline{w}/2$ (в стране нет бедных), получаем $\tilde{a} = 0{,}26$, $J = 0{,}57$. В этом случае на самых богатых членов общества, чей доход выше среднего, вместо 80% будет приходиться 63% всего общественного дохода. Таким образом, уменьшив с помощью прогрессивного налога доходы богатых членов общества всего лишь на 21%, государство в состоянии увеличить доход наименее обеспеченных граждан в 1,85 раза.

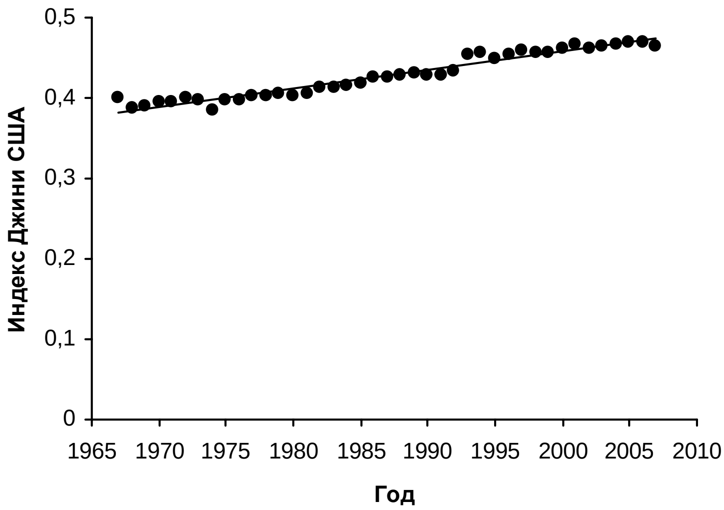

***Рис. 2.* Динамика индекса Джини США**

Источник. http://www.census.gov/hhes/www/income/histinc/ie6.html.

В подтверждение изложенному рассмотрим представленную на рис. 2 динамику индекса Джини США в период с 1965 по 2007 г. Экспериментальные данные на рис. 2 показаны “жирными” точками, линейный тренд - тонкой линией. Из рисунка видно, что средняя скорость роста индекса Джини США в рассматриваемый период времени приблизительно равна 0,0023 в год. Аналогичная тенденция роста индекса Джи-

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Gini_coefficient.

[9] Курс социально-экономической статистики: Учеб. пособие. 5-е изд. / Под ред. *М.Г. Назарова*. М., 2006.

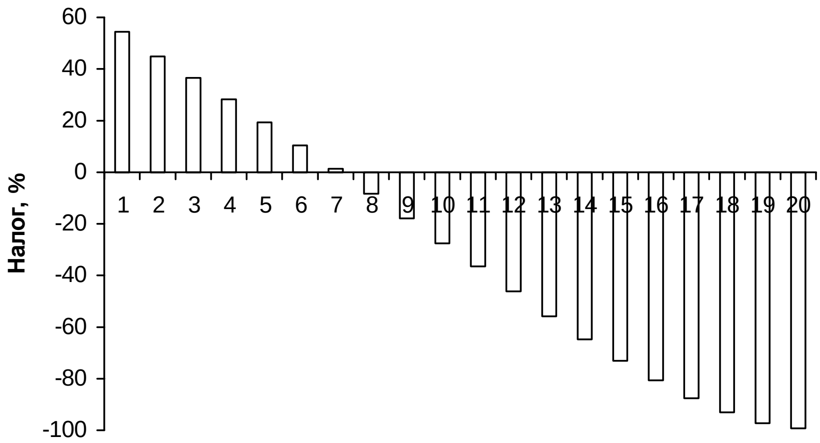

Рис. 3. **Один из возможных вариантов прогрессивного налогообложения**

Разделим все общество на 20 квантильных групп. Обозначим D_m средний доход квантильной группы с номером m (m = 1,2, ..., 20). Процент налогообложения определим по формуле

$$E = \left[D(\gamma = 1) - D(\gamma = 0{,}26)\right] / D(\gamma = 0{,}26) \cdot 100\% . \quad (14)$$

Вычисленный по формуле (14) график налогообложения, удовлетворяющий условию $w_{\min} = \overline{w} / 2$, представлен на рис. 3. Из графика видно, что прогрессивному налогообложению подлежат только 7 из 20 квантильных групп, 13 малодоходных групп должны дотироваться государством.

В заключение отметим, что применение аналогичной схемы прогрессивного налогообложения к предпринимательской деятельности может не только ускорить развитие малого и среднего бизнеса в РФ и тем самым решить задачу занятости населения, но и существенно сократить затраты на собирание налогов, что даст дополнительные ресурсы для развития экономики.

Поступила в редакцию 08.07.2009 г.