

Аналитическое решение задачи оптимального управления инвестициями предприятия в дискретной постановке

© 2009 О.В. Павлов

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева

Проблема принятия инвестиционных решений рассматривается как задача оптимального управления дискретным процессом. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдена структура оптимального управления. Для случая постоянной рентабельности основных средств получено аналитическое решение. Сформулированы критерии для принятия инвестиционных решений.

Ключевые слова: задача оптимального управления инвестициями, дискретный принцип максимума Понтрягина, аналитическое решение, критерии принятия инвестиционных решений.

1. Математическая модель чистого приведенного дохода инвестиционного проекта

Для выбора инвестиционных решений нами применяется теория оптимального управления дискретными процессами¹. Задача управления инвестициями в непрерывной постановке рассматривалась учеными неоднократно². Для практических экономических расчетов более интересным является решение задачи в дискретном виде.

Итак, в инвестиционном проекте производства нового вида продукции промышленное предприятие является единственным участником. Инвестиции осуществляются за счет финансовых ресурсов предприятия. Экономическая эффективность проекта оценивается в целом, схема финансирования не учитывается. Рассматриваются денежные потоки от операционной (производственной) и инвестиционной деятельности³. Количество производимой предприятием продукции равно прогнозируемому объему про-

даж. Считается, что денежный поток, генерируемый инвестиционным проектом, имеет место в конце периода, т.е. является постнумерандо.

В качестве критерия оценки экономической эффективности инвестиционного проекта принимается чистый приведенный доход:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{FCF_t}{(1+r)^t}, \quad (1)$$

где t - номер периода инвестиционного проекта;
 FCF_t - свободный денежный поток инвестиционного проекта (Free Cash Flow) в периоде t ;
 n - горизонт планирования, измеряемый количеством периодов;
 r - ставка дисконтирования.

Горизонт планирования определяется как объективным фактором - жизненным циклом инвестиционного проекта, так и субъективным - дальновидностью менеджера, принимающего решение.

Свободный денежный поток инвестиционного проекта FCF_t в конце периода t определяется как разница денежных потоков от операционной OCF_t (Operating Cash Flow) и инвестиционной ICF_t (Investment Cash Flow) деятельности:

$$FCF_t = OCF_t - ICF_t, \quad t = 0, n. \quad (2)$$

Денежный поток от операционной деятельности рассчитывается так (здесь и далее предполагается $t = 0, n$):

$$OCF_t = REV_t - NOC_t - PT_t, \quad (3)$$

где REV_t - выручка (Revenue) от реализации произведенной продукции;
 NOC_t - чистые операционные издержки (Net Operating Costs);
 PT_t - налог на прибыль (Profit Tax).

Выручка определяется следующим образом:

$$REV_t = P_t Q_t, \quad (4)$$

¹ См.: Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973; Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. М., 2003.

² См.: Соколовский Л.Е. Модели оптимального функционирования предприятия. М., 1980; Горелик В.А., Конonenko А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М., 1982; Косачев Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. М., 2004; Павлов О.В. Оптимальные стратегии привлечения финансовых ресурсов для развития фирмы в длительном периоде // Вестн. Самар. гос. аэрокосм. ун-та. 2004. № 1 (5). С. 147-152.

³ См.: Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов. М., 1997; Бирман Г., Шмидт С. Капиталовложения: Экономический анализ инвестиционных проектов. М., 2003; Бриггем Ю., Гаснерски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс: В 2 т. СПб., 1998; Хелферт Э. Техника финансового анализа. СПб., 2003; Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика: Учеб. пособие. М., 2004.

где P_t - цена продукции;

Q_t - прогноз объема продаж продукции.

Чистые операционные издержки включают материальные затраты MC_t (Material Costs), заработную плату WS_t (Wages and Salary), начисления на заработную плату WC_t (Wages Charges):

$$NOC_t = MC_t + WS_t + WC_t.$$

Материальные затраты рассчитываются по формуле

$$MC_t = Cm_t Q_t,$$

где Cm_t - материальные затраты на единицу продукции.

Фонд заработной платы определяется так:

$$WS_t = w_t L_t,$$

где w_t - средняя ставка заработной платы персонала;

L_t - численность производственного персонала.

Численность персонала рассчитывается по формуле

$$L_t = \frac{Q_t}{l_t},$$

где l_t - норматив выпуска продукции средним работником за период t .

Начисления на заработную плату определяются следующим образом:

$$WC_t = \tau_w WS_t,$$

где $\hat{\delta}_w$ - ставка единого социального налога.

Чистые операционные издержки запишутся в виде

$$NOC_t = Q_t C_t, \quad (5)$$

где C_t - себестоимость продукции (затраты на единицу продукции) рассчитывается по формуле

$$C_t = Cm_t + (1 + \tau_w) \frac{w_t}{l_t}. \quad (6)$$

Налог на прибыль вычисляется таким способом:

$$PT_t = \tau_c (REV_t - NOC_t - DEP_t), \quad (7)$$

где $\hat{\delta}_c$ - ставка налога на прибыль;

DEP_t - амортизационные начисления (Depreciation).

Для расчета износа основных средств (внеоборотных активов) предприятия FA_t (Fixed Assets) используется метод равномерного начисления амортизации:

$$DEP_t = \mu FA_t, \quad (8)$$

где μ - норма амортизации;

FA_t - стоимость основных средств предприятия в начале периода t до новых капиталовложений.

Процесс производственной деятельности предприятия описывается производственной функцией Леонтьева:

$$P_t Q_t = f FA_t, \quad (9)$$

где $P_t Q_t$ - стоимость прогнозируемого объема продаж продукции (выручка);

f - фондоотдача основных средств, характеризующая производственный процесс.

Подставим формулы (4)-(5) и (7)-(9) в выражение для денежного потока от операционной деятельности (3):

$$OCF_t = \left[(1 - \tau_c) f \frac{P_t - C_t}{P_t} + \tau_c \mu \right] FA_t.$$

Введем понятие рентабельности (доходности) основных средств (внеоборотных активов) предприятия в форме денежного потока $ROFA_t$, или $CFROFA_t$ (cash flow Return On Fixed Assets):

$$ROFA_t = \frac{OCF_t}{FA_t} = (1 - \tau_c) f \frac{P_t - C_t}{P_t} + \tau_c \mu. \quad (10)$$

Экономическим смыслом рентабельности основных средств является величина операционного денежного потока, приходящаяся на единицу стоимости основных средств предприятия. Рентабельность основных средств зависит от цены P_t и себестоимости C_t продукции, фондоотдачи f , ставки налога на прибыль τ_c и налогового щита, связанного с амортизацией $\tau_c \mu$. Рентабельность основных средств по денежному потоку по своему экономическому смыслу близка к понятию рентабельности инвестиций по денежным потокам⁴.

С учетом (10) операционный денежный поток запишется так:

$$OCF_t = ROFA_t FA_t. \quad (11)$$

Инвестиционный денежный поток ICF_t расходуется на капиталовложения в основные средства INV_t и изменение оборотного капитала ΔNWC_t :

$$ICF_t = \alpha_t INV_t + \Delta NWC_t, \quad (12)$$

где INV_t - финансовый ресурс предприятия в период t ;

α_t - процент от финансового ресурса предприятия INV_t , предназначенный для капиталовложений в реальные активы.

Если весь финансовый ресурс INV_t инвестируется в рассматриваемый проект, то $\alpha_t = 1$, если не инвестируется, то $\alpha_t = 0$.

Согласно рекомендациям Р. Брейли и С. Майерса⁵ чистый оборотный капитал (Net Working Capital) может быть рассчитан как процент от выручки:

$$NWC_t = \gamma_t REV_t.$$

⁴ Бирман Г., Шмидт С. Указ. соч.; Хелферт Э. Указ. соч.

⁵ Брейли Р., Майерс С. Указ. соч.

Процент γ_t характеризует эффективность управления оборотным капиталом в периоде t . Изменение потребности в финансировании оборотного капитала возникает при изменении объемов продаж:

$$\Delta NWC_t = \gamma_t (REV_{t+1} - REV_t).$$

С учетом (4) и (9) изменение оборотного капитала определится как

$$\Delta NWC_t = \gamma_t f (FA_{t+1} - FA_t) = \varphi_t \Delta FA_t. \quad (13)$$

Экономическим смыслом коэффициента φ_t является количество денежных средств, инвестируемое (высвобождается) при изменении оборотного капитала из-за изменения стоимости основных средств на одну денежную единицу.

Динамика изменения стоимости основных средств проекта описывается дискретным уравнением

$$(14)$$

где k_t - коэффициент выбытия основных средств в периоде t .

В начальный период для основных средств задано начальное условие

$$FA_0 = 0. \quad (15)$$

Изменение основных средств определится из формулы (14)

$$\Delta FA_t = \alpha_t INV_t - k_t FA_t. \quad (16)$$

Подставим (16) в формулу (13):

$$\Delta NWC_t = \varphi_t (\alpha_t INV_t - k_t FA_t). \quad (17)$$

С учетом (16) инвестиционный денежный поток (12) запишется так:

$$ICF_t = \alpha_t INV_t (1 + \varphi_t) - \varphi_t k_t FA_t. \quad (18)$$

Выражение для чистого приведенного дохода инвестиционного проекта (1) с учетом (2), (11) и (18) примет вид

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{(ROFA_t + \varphi_t k_t) FA_t - \alpha_t INV_t}{(1+r)^t}. \quad (19)$$

2. Постановка и решение задачи оптимального управления инвестициями в дискретном виде

В качестве управления принимается процент α_t от финансового ресурса предприятия INV_t , расходуемый на капиталовложения в реальные активы. На управление наложено следующее ограничение:

$$(20)$$

Сформулируем задачу оптимального управления: зная начальное состояние основных средств проекта (15), необходимо выбрать такое допустимое управление инвестициями (20) для дискретного процесса (14), чтобы чистый приведенный доход предприятия (19) принял максимальное значение.

Применим для решения задачи дискретный принцип максимума Понтрягина⁶. Запишем гамильтониан:

$$H_t = \left\{ \Psi_{t+1} - \frac{1 + \varphi_t}{(1+r)^t} \right\} \alpha_t INV_t + \Psi_{t+1} FA_t (1 - k_t) + \frac{(ROFA_t + \varphi_t k_t) FA_t}{(1+r)^t}, \quad t = 0, n.$$

Гамильтониан линейно зависит от управления α_t .

В соответствии с принципом максимума в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона H_t достигает максимума относительно управления.

Из условия максимума гамильтониана найдем структуру оптимального управления:

$$(21)$$

Сопряженное уравнение запишется следующим образом:

$$\Psi_t = \frac{\partial H_t}{\partial FA} = (1 - k_t) \Psi_{t+1} + \frac{ROFA_t + \varphi_t k_t}{(1+r)^t}, \quad t = n, 0. \quad (22)$$

Для сопряженного уравнения на правом конце должно выполняться условие трансверсальности

$$\Psi_{n+1} = 0. \quad (23)$$

Из условия (21) и условия трансверсальности (23) следует: инвестирование в последний период n не производится $\alpha_n = 0$. Анализируя исходное (14) и сопряженное уравнение (22), структуру оптимального управления (21), можно сделать вывод: уравнения решаются независимо друг от друга. Если рассчитать сопряженную переменную от конечного периода до начального по уравнению (22), используя условие трансверсальности

⁶ См.: Болтянский В.Г. Указ. соч.; Лагоша Б.А. Указ. соч.

ности (23), то возможно определить оптимальное управление (21), а затем вычислить исходную переменную от начального периода до конечного по уравнению (14).

Оптимальное инвестиционное решение определяется рентабельностью основных средств предприятия по денежному потоку $ROFA_t$, ставкой дисконтирования r , горизонтом планирования n , коэффициентом изменения оборотного капитала Φ_t , коэффициентом выбытия основных средств k_t .

3. Аналитическое решение задачи оптимального управления в дискретном виде

В частном случае, когда рентабельность основных средств инвестиционного проекта, коэффициент выбытия основных средств, коэффициент изменения оборотного капитала являются постоянными: $ROFA_t = ROFA = const$, $k_t = k = const$, - возможно аналитическое решение дискретной задачи. Уравнение для сопряженной переменной (22) запишется в виде

$$\Psi_t = (1 - k)\Psi_{t+1} + \frac{ROFA + \phi k}{(1 + r)^t}, \quad t = n, 0. \quad (24)$$

Условие трансверсальности $\Psi_{n+1} = 0$.

Формула (24) является рекуррентной, выведем формулу для сопряженной переменной через параметры проекта. Запишем сопряженную переменную в периоды $t = n, n - 1, n - 2, n - 3...$ по уравнению (24), используя условие трансверсальности.

$$\Psi_{n+1} = 0;$$

$$\Psi_n = \frac{ROFA + \phi k}{(1 + r)^n};$$

$$\Psi_{n-1} = \frac{ROFA + \phi k}{(1 + r)^{n-1}} \left[1 + \frac{1 - k}{1 + r} \right];$$

$$\Psi_{n-2} = \frac{ROFA + \phi k}{(1 + r)^{n-2}} \left[1 + \frac{1 - k}{1 + r} + \left(\frac{1 - k}{1 + r} \right)^2 \right];$$

$$\Psi_{n-3} = \frac{ROFA + \phi k}{(1 + r)^{n-3}} \left[1 + \frac{1 - k}{1 + r} + \left(\frac{1 - k}{1 + r} \right)^2 + \left(\frac{1 - k}{1 + r} \right)^3 \right].$$

Обобщая, запишем формулу для переменной Ψ_{t+1} :

$$\Psi_{t+1} = \frac{ROFA + \phi k}{(1 + r)^{t+1}} \left[1 + \frac{1 - k}{1 + r} + \left(\frac{1 - k}{1 + r} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1 - k}{1 + r} \right)^{n-t-1} \right].$$

Выражение в скобках является суммой геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии $\frac{1 - k}{1 + r}$ и количеством членов прогрессии, равным $n - t$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим следующее выражение для сопряженной переменной:

$$\Psi_{t+1} = \frac{ROFA + \phi k}{r + k} \left[\frac{(1 + r)^{n-t} - (1 - k)^{n-t}}{(1 + r)^n} \right]. \quad (25)$$

С учетом (25) оптимальное управление инвестициями (21) примет вид:

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{ROFA + \phi k}{r + k} \left[\frac{(1 + r)^{n-t} - (1 - k)^{n-t}}{(1 + r)^n} \right] \geq 1 + \phi \\ 0, & \text{если } \frac{ROFA + \phi k}{r + k} \left[\frac{(1 + r)^{n-t} - (1 - k)^{n-t}}{(1 + r)^n} \right] < 1 + \phi \end{cases}. \quad (26)$$

Так как функция

$$\frac{ROFA + \phi k}{r + k} \left[1 - \left(\frac{1 - k}{1 + r} \right)^{n-t} \right]$$

является монотонно убывающей, то, следовательно, возможно переключение управления не более одного раза в периоды от 0 до n :

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq t^{kp} \\ 0, & \text{если } t^{kp} < t \leq n \end{cases} \quad t = 0, n. \quad (27)$$

Таким образом, оптимальной стратегией является инвестирование финансовых средств в периоды от 0 до t^{kp} и полный отказ от инвестирования после периода t^{kp} .

Из (26) следует, что инвестирование в период t выгодно, если для рентабельности основных средств по денежным потокам выполняется условие

$$ROFA \geq \frac{(1 + \phi)(r + k)}{1 - \left[\frac{1 + r}{1 - k} \right]^{t-n}} - \phi k.$$

В правой части неравенства находится критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам

$$ROFA^{kp} = \frac{(1 + \phi)(r + k)}{1 - \left(\frac{1 + r}{1 - k} \right)^{t-n}} - \phi k.$$

Таким образом, условие (26) переписывается в виде

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } ROFA \geq ROFA^{кр} \\ 0, & \text{если } ROFA < ROFA^{кр} \end{cases} \quad (28)$$

Полученное условие (28) может быть использовано как критерий для принятия решения об инвестировании средств в тот или иной актив. Если при заданном горизонте планирования n , ставке дисконтирования r , коэффициенте изменения оборотного капитала Φ , коэффициенте выбытия основных средств k условие (28) для рентабельности основных средств $ROFA$ не выполняется, то инвестиционный проект должен быть отклонен.

Для предварительных расчетов, когда можно пренебречь выбытием основных средств $k = 0$ и изменением оборотного капитала $\Phi_t = 0$, критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам будет иметь вид

$$(29)$$

В этом случае критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам $ROFA^{кр}(t, n, r)$ является функцией периода t , в котором производятся инвестиции, горизонта планирования n , ставки дисконтирования r . Из формулы (29) следует, что при бесконечном инвестиционном проекте критическое значение рентабельности основных средств стремится к ставке дисконтирования r .

Для начального периода $t = 0$ критическое значение рентабельности основных средств определяется выражением

$$ROFA^{кр}(0, n, r) = \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{1}{(1+r)^n}} = \frac{1}{B(n, r)},$$

где $B(n, r)$ - коэффициент аннуитета;

$\frac{1}{B(n, r)}$ - коэффициент возврата капитала (capital recovery factor)⁷.

Таким образом, для осуществления инвестиций в начальный период времени рентабельность основных средств должна быть больше, чем коэффициент возврата капитала.

Из равенства нулю условия

$$\frac{ROFA + \Phi k}{r + k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+r} \right)^{n-t} \right] - (1 + \Phi) = 0$$

определим период прекращения инвестиций:

$$t^{кр} = n + \log_{\frac{1+r}{1-k}} \left[1 - \frac{(1+\Phi)(r+k)}{ROFA + \Phi k} \right]. \quad (30)$$

Для предварительных расчетов, когда можно пренебречь выбытием основных средств $k = 0$ и изменением оборотного капитала $\Phi = 0$, формула для периода прекращения инвестиций будет иметь вид

$$t^{кр} = n + \log_{1+r} \left[1 - \frac{r}{ROFA} \right]. \quad (31)$$

Выражение в скобках в формулах (30), (31) меньше 1, поэтому логарифм является отрицательным числом, и период прекращения инвестиций находится в интервале от 0 до n . Период прекращения инвестиций зависит от горизонта планирования: чем больший период времени предполагается осуществлять инвестиционный проект, тем дольше необходимо инвестировать в основные средства. Формулы (30), (31) математически определяют зависимость инвестиционного решения от дальновидности менеджера (жизненного цикла проекта). Период прекращения инвестиций также зависит от соотношения рентабельности основных средств $ROFA$ и ставки дисконтирования r .

Поступила в редакцию 07.07.2009 г.

⁷ Бирман Г., Шмидт С. Указ. соч.