Исследование возможности использования теории матричных игр принятия решений в сфере юридических услуг в условиях неопределенности

© 2015 Бадюков Владимир Федорович
доктор физико-математических наук, профессор
© 2015 Руссу Ярослав Сергеевич
Хабаровская государственная академия экономики и права
680042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, д. 134
E-mail: yaroslav.russu@mail.ru

Исследуются на практических примерах возможности использования матричных игр при оказании юридических услуг, ведении юридического бизнеса. Приводится пример практического применения математических методов в социальных науках, что показывает актуальность произведенного исследования, его практическую значимость. Рассматривается возможность применения критериев Вальда, Гурвица, Сэвинджа, Марковица.

Ключевые слова: управление риском, теория игр, юридические услуги, социально-экономические науки, математические методы.

В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция взаимопроникновения наук из существенно различных областей знаний. Многие первоклассные научные результаты получены на стыке двух, а иногда трех и более наук. Довольно часто методы одних наук используются для получения теоретических и практических результатов в других науках и других сферах практической деятельности.

Целью настоящей работы является анализ возможностей использования методов теории матричных игр при оказании юридических услуг, например при представлении интересов в суде.

Теория матричных игр зародилась в середине прошлого века в трудах Вальда, Сэвинджа, Гурвица и других исследователей. Суть этой теории состоит в выработке критериев принятия решений из имеющихся у инвестора в наличии с целью выбора наилучшего в некотором смысле решения. При реализации этой концепции инвестор или лицо, принимающее решение (ЛПР), выбирает n решений, доступных ему, и формализует m состояний рынка или внешней среды, каждое из которых может наступить в будущем. Проблема выбора состоит в том, что при принятии решения неизвестно, какое состояние рынка наступит в будущем. При этом рассматриваются два принципиально отличающихся друг от друга типа состояния внешней среды. К первому типу относится состояние рынка в условиях полной неопределенности, когда нет статистической информации относительно, например, вероятностей наступления каждого из состояний рынка и т.д. Ко второму типу относится состояние рынка в условиях частичной неопределенности, когда имеется статистическая информация, позволяющая находить вероятностные характеристики решений, состояний внешней среды и т.д.

Для использования теории матричных игр инвестору необходимо построить матрицу последствий, т.е. матрицу откликов состояний внешней среды на каждое из решений инвестора. В общем виде матрица последствий Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} qi1 \ldots\ldots\ldots qim \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ qn1 \ldots\ldots\ldots qnm \end{pmatrix},$$

где q_{ij} - отклик в форме финансового результата j-го состояния внешней среды на i-е решение.

Для выбора наилучшего решения существенную роль играет модель психологии поведения ЛПР.

Рассмотрим модельный пример, проясняющий возможность использования теории матричных игр для выбора управленческого решения в сфере оказания юридических услуг по представлению интересов в суде. Юридической компании поступили три предложения на обслуживание:

1. Заказчик - мужчина в возрасте 84 лет со слабым здоровьем, хочет оспорить сделку с риелторской фирмой. Оплата по договору 45 тыс. руб. Аванс составляет треть оплаты. Высок риск смерти заказчика.

2. Заказчик - женщина в возрасте 37 лет, желает нанять юриста для развода и раздела имущества с супругом. Оплата по договору 30 тыс. руб. Аванс составляет две третьих оплаты. Высок риск потери интереса к оказанию услуги из-за примирения с мужем.

3. Заказчик - юридическое лицо на пороге банкротства, руководство компании желает нанять юриста для обжалования нескольких кабальных сделок, поставивших организацию в текущее состояние. Оплата по договору 120 тыс. руб. Аванс не предусмотрен.

Компания обладает ресурсами для ведения только одного из предложенных дел. Построим матрицу последствий для принятия наиболее продуктивного решения.

Имеется три решения. Первое решение - юридическая компания принимает на обслуживание первого заказчика. Собственно, второе и третье решения состоят в принятии на обслуживание второго и третьего заказчика.

Внешняя среда, согласно характеристикам дел, имеет шесть состояний. Первые два состояния: первый заказчик умер, здоров. Третье и четвертое состояние: второй заказчик помирился с мужем, не помирился с мужем. Пятое и шестое состояния: третий заказчик обанкротился, не обанкротился.

Оценим элементы матрицы последствий. Элемент q_{11} представляет собой отклик первого состояния внешней среды на первое решение. В этом случае юридическая компания оставляет у себя аванс, т.е. q_{11} = 15 тыс. руб. Аналогично, q_{12} = 45 тыс. руб. Элементы $q_{13}...q_{16}$ отсутствуют, так как на первое решение состояния внешней среды с третьего по шестое не влияют.

Аналогично, q_{23} = 20 тыс. руб., q_{24} = 30 тыс. руб., соответственно, элементы q_{21}, q_{22}, q_{25}, q_{26} отсутствуют. Для третьего решения q_{35} = 0, q_{36} = 120 тыс. руб. Элементы q_{31},....q_{34} отсутствуют. Таким образом, матрица последствий принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} 15 & 45 & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & 20 & 30 & \text{—} & \text{—} \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & 0 & 120 \end{pmatrix}.$$

Для принятия решения используем критерий Вальда. Этот критерий иногда называют критерием крайнего пессимизма, а именно: ЛПР выбирает следующий психологический портрет: какое бы я решение ни принял, состояние среды будет таким, что я получу наименьший результат. Так, например, если принимается первое решение, то в будущем наступит первое состояние и юридическая компания получит выигрыш 15 тыс. руб., т.е.

$$q_1 = \min\ (15;\ 45) = 15 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогично, если принимается второе решение, то наступит третье состояние внешней среды и инвестор получит

$$q_2 = \min\ (20;\ 30) = 20 \text{ тыс. руб.}$$

Если принимается третье решение, то, согласно принципу крайнего пессимизма, реализуется пятое состояние внешней среды и инвестор получит

$$q_3 = \min\ (0;\ 120) = 0 \text{ тыс. руб.}$$

Тогда, чтобы добиться наилучшего результата для психологического портрета крайнего пессимизма, необходимо среди наихудших результатов выбрать наилучший:

$$q_2 = \max\ (q_1;\ q_2;\ q_3) = \max\ (15;\ 20;\ 0) = 20 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, критерий Вальда рекомендует выбрать второе решение, т.е. второго заказчика.

Для выбора наилучшего решения можно, таким образом, воспользоваться критерием крайнего оптимизма. В том случае, какое бы решение он ни принял, будущее состояние внешней среды окажется наиболее благоприятным для него. В данном случае, если инвестор выбирает первое решение, то, согласно выбранной психологической установке, реализуется второе состояние рынка и инвестор получит 45 тыс. руб. При выборе второго решения ЛПР предполагает реализацию четвертого состояния, согласно которому он получит 30 тыс. руб. В случае выбора третьего решения реализуется шестое состояние с результатом 120 тыс. руб. Теперь, согласно критерию крайнего оптимизма, необходимо найти максимальное значение среди трех максимумов:

$$\max\ (45;\ 45;\ 120) = 120 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, согласно критерию крайнего оптимизма, необходимо выбрать третье решение. Оба эти критерия обладают только одним недостатком - в них используются только наименьший или наибольший результат по каждому решению. Для преодоления этого недостатка можно использовать критерии взвешенного оптимизма-пессимизма (критерий Гурвица). Согласно этому критерию по каждому решению находится средневзвешенное значение между наилучшим и наихудшим откликами состояний внешней среды. В этой задаче средневзвешенное значение w_1 по первому решению определяется формулой

$$w_1 = \lambda \cdot 45 + (1 - 2) \cdot 15 = 30\ \lambda + 15.$$

Для второго решения

$$w_2 = \lambda \cdot 30 + (1 - 2) \cdot 20 = 10\ \lambda + 20.$$

Для третьего решения

$$w_3 = \lambda \cdot 120 + (1 - 2) \cdot 0 = 120\ \lambda .$$

Вес λ носит название коэффициента оптимизма. При выборе критерия Гурвица ЛПР должен выбрать самостоятельно значение коэффициента оптимизма, исходя из выбранной стратегии развития юридической организации. Вес λ

по определению находится в пределах от нуля до единицы. В случае консервативной стратегии целесообразно выбрать λ ближе к нулю, при агрессивной - ближе к единице, при нейтральной целесообразно принять $\lambda = 0{,}5$. Согласно критерию Гурвица необходимо выбрать то решение, по которому средневзвешенный результат максимален. Например, при выборе $\lambda = 0{,}5$ $w_1 = 30$; $w_2 = 25$; $w_3 = 60$, следовательно, согласно критерию Гурвица, третье решение является наилучшим. Можно вычислить, при каких значениях коэффициента оптимизм λ каждое из решений предпочтительнее остальных двух. Так, если выполняется система неравенств $w_3 > w_1$, $w_3 > w_2$, то третье решение предпочтительнее и первого и второго решения. Решая эту систему, получим неравенство $1 > \lambda > 0{,}18$. Аналогично, при выполнении неравенства $0 < \lambda < 0{,}18$ выполняется система неравенств $w_2 > w_3$, $w_2 > w_1$, т.е. второе решение предпочтительнее первого и третьего. Расчеты показывают, что система неравенств $w_1 > w_2$, $w_1 > w_3$ не выполняется ни при каких значениях коэффициента оптимизма.

Таким образом, согласно трем применяемым критериям, первое решение не может быть предпочтительнее второго или третьего.

Следует отметить, что предложенные критерии являются правилами-рекомендациями для принятия решений, использующими в своей основе психологию инвестора в условиях полной неопределенности.

Рассмотрим условия частичной неопределенности, когда известны, например, вероятности наступления состояний внешней среды. Данные вероятности можно оценить из статистики юридических практик и иных видов статистик. В этой модельной задаче вероятность наступления первого состояния P_1, т.е. смерти первого заказчика на 90-м году жизни, может быть оценена на основании так называемых таблиц смертности, составляемых на базе переписи населения и используемых при ценообразовании в страховании жизни. Соответственно, вероятность P_2 наступления второго состояния внешней среды, т.е. дожития первого заказчика, например, до 90-го года, находится по формуле $P_2 = 1 - P_1$. Вероятность P_3 наступления третьего состояния внешней среды, т.е. примирения второго заказчика с мужем, можно оценить на основании статистики бракоразводных процессов. Соответственно, вероятность P_4 наступления четвертого состояния неопределенности рассчитывается равенством $P_4 = 1 - P_3$.

Вероятности P_5 и $P_6 = 1 - P_5$ наступления пятого и шестого состояний внешней среды могут быть оценены на основании статистики банкротств и предбанкротных состояний.

Согласно таблице смертности[1] вероятность P_1 умереть на 85-м году жизни среди тех, кто дожил до возраста 84 года, равна $P_1 = 0{,}12$, соответственно, вероятность дожить до 85 лет равна $P_2 = 0{,}88$.

Согласно статистике бракоразводных процессов по Хабаровскому краю вероятность примирения женщины возраста 37 лет с мужем равна $P_3 = 0{,}7$, соответственно $P_4 = 0{,}3$.

На основании статистики банкротств по Хабаровскому краю и экспертных оценок найдено, что вероятность банкротства равна $P_5 = 0{,}6$, соответственно, $P_6 = 0{,}3$.

Добавив к матрице последствий Q строку вероятностей, получим матрицу последствий Q_1 в условиях частичной неопределенности:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}88 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 15 & 45 & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & 0 & 120 \end{pmatrix}.$$

Для принятия решения в условиях частичной неопределенности существует два критерия: критерий максимального ожидаемого дохода и критерий минимального риска. Применим критерий максимального ожидаемого дохода и критерий минимального риска. Применим критерий максимального ожидаемого дохода. Вычислим в начале ожидаемые доходы (математические ожидания доходов) q_1, q_2, q_3 каждого из трех решений по формулам:

$$q_1 = 0{,}12 \cdot 15 + 0{,}88 \cdot 45 = 41{,}4,$$
$$q_2 = 0{,}7 \cdot 20 + 0{,}3 \cdot 30 = 23,$$
$$q_3 = 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 120 = 48.$$

Тогда

$$\max(q_1, q_2, q_3) = q_3 = 48.$$

Согласно критерию максимального ожидаемого дохода необходимо выбрать третье решение.

Применим критерий минимального риска. Для изменения риска необходимо выбрать его измеритель. В качестве меры риска выберем среднее квадратическое отклонение (СКО) от ожидаемого дохода, предложенное как измеритель Г. Марковицем в середине прошлого века в знаменитой работе[2] и получившее наибольшее распространение в данном качестве. Это объясняется тем фактом, что риск характеризуется изменчивостью (волатильностью) значений каждого решения. Например, ЛПР, выбирая третье решение, рискует недополучить 120 тыс. руб., так как размер значений равен 120. Во втором решении размер значений равен 10 тыс. руб. (30-20), т.е. инвестор рискует недополучить 10 тыс. руб. Интуитивно ясно, что риск второго решения меньше риска третьего решения. Величина СКО также оценивает волатильность значений решения, а именно: с ростом волатильности СКО также имеют тенденцию к росту. Вычислим риски r_1, r_2, r_3 каждого из решений, приравняв их к СКО$_1$, СКО$_2$, СКО$_3$. Согласно формулам теории вероятностей:

$$r_1 = \sqrt{(15-41{,}4)^2 \cdot 0{,}12 + (45-41{,}4)^2 \cdot 0{,}88} = 9{,}75,$$

$$r_2 = \sqrt{(20-23)^2 \cdot 0{,}7 + (30-23)^2 \cdot 0{,}3} = 4{,}58,$$

$$r_1 = \sqrt{(0-48)^2 \cdot 0{,}6 + (120-48)^2 \cdot 0{,}4} = 58{,}79.$$

Применим критерий минимального риска. Для этого найдем

$$\min(r_1, r_2, r_3) = \min(9{,}75; 4{,}58; 58{,}79) = 4{,}58 = r_2.$$

Согласно критерию минимального риска необходимо выбрать второе решение, так как его мера риска минимальна.

Таким образом, критерий максимального ожидаемого дохода указывает на третье решение, а критерий минимального риска - на второе решение. Тогда какое решение выбрать ЛПР? Здесь имеется два подхода. Согласно первому подходу ЛПР должен не определиться в своем отношении к риску и доходу. Если ЛПР не склонен рисковать, уважает риск, т.е. придерживается консервативной стратегии, то он выберет второе решение, минимизирующее риск.

Если ЛПР любит рисковать в надежде, что ему повезет и он получит максимальный доход, то в этом случае он выберет третье решение, максимизирующее ожидаемый доход.

Согласно второму подходу оба критерия (максимального ожидаемого дохода и минимального риска) сворачиваются в один критерий. Затем выбирается решение, оптимизирующее построенный критерий. Существует несколько способов свертки двухкритериальной задачи. Для проведения операции свертывания вначале необходимо выделить решения, которые не могут быть наилучшими, и построить множество оптимальных решений по Парето. Каждое решение определяется двумя координатами: ожидаемым доходом и риском. Обозначим первое решение через Q_1, второе и третье через Q_2 и Q_3.

Тогда в координатной форме данные решения имеют вид Q_1 (41,4;9,75), Q_2 (23;4,58), Q_3 (48;58,79). Из этого множества решений необходимо удалить доминирующие решения, которые не могут быть наилучшими. Доминирующие решения можно выявить путем парных сравнений решений. Пусть имеется два решения. Если доход первого решения больше дохода второго решения, а риск первого решения меньше риска второго решения, то первое решение называется доминирующим решением по отношению ко второму решению. Второе решение, соответственно, является доминирующим по отношению к первому решению. Рассмотрим три данных решения Q_1, Q_2 и Q_3. Можно заметить, что среди них нет доминирующих решений. Например, если сравнить решения Q_1 и Q_3, то ожидаемый доход решения Q_1 больше ожидаемого дохода решения Q_2, но и риск Q_1 также меньше риска решения Q_2. Следовательно, все решения Q_1, Q_2, Q_3 образуют множество оптимальности по Парето.

Для свертывания двух критериев можно использовать единичный риск решения. Для этого каждого решения $Q\,(q,r)$ с ожидаемым доходом q и риском r можно вычислить единичный риск, определяемый формулой

$$l = \frac{r}{q}.$$

Согласно данной формуле единичный риск есть риск, приходящийся на единицу ожидаемого дохода. Отсюда появляется и название этого показателя. Если теперь минимизировать числитель q формулы и максимизировать знаменатель q в рамках двухкритериальной задачи, то вся дробь l будет минимизироваться. Таким образом, с помощью единичного риска перешли от двухкритериальной задачи "максимум ожидаемого дохода" к однокритериальной задаче минимизации единичного риска. Теперь для выбора наилучшего решения необходимо найти единичные риски l_1, l_2, l_3 каждого решения и выбрать решение с минимальным единичным риском. Проведя расчеты по формуле, получим

$$l_1 = \frac{9{,}75}{41{,}4} = 0{,}236; \quad l_2 = \frac{4{,}58}{23} = 0{,}199;$$

$$l_3 = \frac{58{,}79}{4481{,}4} = 1{,}225.$$

Тогда $\min(l_1, l_2, l_3) = 0{,}199 = l_2$. Таким образом, наилучшим решением является второе решение, где заказчиком является женщина в возрасте 37 лет, желающая нанять юриста для развода и раздела имущества с супругом.

Отметим здесь, что на второе решение указывают критерии Вальда и Гурвица при $0 < l < 0{,}18$, где l - коэффициент оптимизма в условиях полной неопределенности. Таким образом, именно на второе решение указывают большинство рассмотренных критериев. В этом смысле второе решение также является наилучшим.

Рассмотренная в настоящей работе задача является достаточно простой, например, потому что на каждое решение существуют только отклики от двух из шести состояний внешней среды (см. матрицу). Можно рассмотреть возможность ведения двух из предложенных трех дел, т.е. рассмотреть в качестве трех дополнительных решений привлечение сразу первого и второго дел, первого и третьего дел или второго и третьего дел путем временного привлечения одного юриста извне. Но при том появятся дополнительные расходы, например, на заработную плату внешнего совместителя. Можно также рассмотреть возможность принятия седьмого решения - ведения сразу всех трех дел с привлечением дополнительных двух юристов. При этом значительно увеличится число состояний внешней среды.

Предложенное исследование показывает эффективность использования математического аппарата в области социальных наук. В данном случае исследование проводилось на границе юридической и экономической областей знаний с использованием математического языка. Это подтверждает тезис об актуальности развития методологии социального исследования с применением математического аппарата[3].

---

[1] *Бадюков В.Ф.* Актуарные расчеты : учеб. пособие. Хабаровск, 2010. С. 19.

[2] *Колесников А.К., Лебедова И.П.* Взаимодействие социологии и математики: эпистемологические перспективы // Социологические исследования. 2013. □ 7. С. 69-78.

[3] *Markowitz H.M.* Portdolio selection // Jornal of Finance. 1952. Vol. 7, □ 1.

Поступила в редакцию 05.09.2015 г.