Существование ненулевых периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра

© 2014 Бакулина Юлия Евгеньевна
кандидат физико-математических наук, доцент
© 2014 Казаков Владислав Владимирович
заместитель директора
© 2014 Чехов Антон Павлович
заместитель декана
Рязанский филиал Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ)
390013, г. Рязань, ул. Семинарская, д. 44/3
E-mail: oet2004@yandex.ru

Исследуется проблема существования ненулевых периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Предложенный метод может быть использован для предварительного анализа оптимального распределения запасов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, зависящие от параметра; нелинейные системы; ненулевые периодические решения.

Нами исследуется проблема существования ненулевых периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Доказаны теоремы существования и отсутствия периодических решений в достаточно малой окрестности нулевого решения.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{dy}{ds} = L(s)y + f_k(s,y,\lambda), \qquad (1)$$

в которой λ-параметр, $\lambda \in E_m$, $y \in E_n, |y| = \max\limits_i \{|y_i|\}$, $s \in [o,w]$, $w > o$, $L(s) - n \cdot n$ матрица, $\|L\| = \sup\limits_{|s|\le 1}|Ls|$, $f_k(s,y,\lambda)$ - однородная вектор-функция порядка $k (k \ge 2)$ относительно s,y,λ. E_s - s-мерное действительное векторное пространство.

Введем следующие обозначения:

$$D(\delta_o) = \{(s,y,\lambda): s \in [o,w], y \in E_n : |y| \le \delta_o; \lambda \in E_m : |\lambda| \le \delta_o\},$$

$$W(\delta_o) = \{\alpha \in E_n : |\alpha| \le \delta_o\}, \Lambda(\delta_o) = \{\lambda \in E_m : |\lambda| \le \delta_o\}.$$

Предположим, что на множестве $D(\delta_o)$ матрица $L(s)$ и вектор-функции $f_k(s,y,\lambda)$ определены и непрерывны,

$$L(s+w) = L(s), f_k(s+w,y,\lambda) = f_k(s,y,\lambda), f(s,o,\lambda) \equiv 0.$$

Из определения системы (1) следует, что система (1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметра.

Непосредственно вычислением устанавливаем, что $y \equiv 0$ - решение системы (1).

Следовательно, существует такое число $\delta \in (o,\delta_o]$, что при любых $(\alpha,\lambda) \in W(\delta) \times \Lambda(\delta)$ система (1) имеет решение $y(s,\alpha,\lambda), y(o,\alpha,\lambda) = \alpha$, определенное на сегменте $[o,w]$, непрерывное и удовлетворяющее неравенству $|y(s,\alpha,\lambda)| \le \delta_o$ на множестве $[o,w] \times W(\delta) \times \Lambda(\delta)$.

Если $f_k(s,y,\lambda) \equiv 0$, то система (1) становится однородной:

$$\frac{dy}{ds} = L(s) \cdot y. \qquad (2)$$

Пусть $Y(s)$ - фундаментальная матрица системы (2), тогда решение системы (1) можно записать в виде:

$$y(s,\alpha,\lambda) = Y(s) \cdot \alpha + Y(s) \cdot \int_0^s Y^{-1}(\xi) f_k(\xi,\alpha,\lambda) d\xi.$$

Пусть $y(s,\alpha,\lambda), y(0,\alpha,\lambda) = \alpha$ - решение системы (1), $\alpha \in W(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$. Рассмотрим систему вида

$$\hat{z} = L(s) \cdot z + f_k(s, y(s,\alpha,\lambda), \lambda), \qquad (3)$$

где $y(s,\alpha,\lambda)$ - известная функция.

Теорема 1. Решение $y(s,\alpha,\lambda) = \alpha$ системы (1) является решением системы (3), и решение

$z(s), z(0)=\alpha$ системы (3) является решением системы (1), $z(s)=y(s,\alpha,\lambda)$.

Доказательство. В систему (3) подставим $y=(s,\alpha,\lambda)$, получим

$$\dot{y}(s,\alpha,\lambda)=L(s)\cdot y(s,\alpha,\lambda)+f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda).$$

Равенство справедливо, так как $y(s,\alpha,\lambda)$ - решение системы (1).

Пусть теперь $z(s), z(0)=\alpha$ - решение системы (3). Следовательно, система (3) имеет два решения $y(s,\alpha,\lambda)$ и $z(s)$, удовлетворяющих одним начальным условиям.

Так как система (3) удовлетворяет условию существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра, то $z(s)=y(s,\alpha,\lambda)\forall s\in[o,w]$. Теорема доказана.

Далее будем рассматривать систему (3), а решения будем получать для системы (1).

Тогда решение системы (1) имеет вид

$$y(s,\alpha,\lambda)=Y(s)\alpha+Y(s)\cdot\int_0^s Y^{-1}(\xi)\cdot f_k(\xi,y(\xi,\alpha,\lambda),y)d\xi.$$

Теорема 2. Пусть $L(s), f_k(s,y,\lambda)$ определены и непрерывны на множестве $D(\delta_0)$ и $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f_k(s,y,\lambda)}{|y|}=0$ равномерно относительно $(s,\lambda)\in[0;w]\times\Lambda(\delta_0)$. Тогда решение системы (1) $y(s,\alpha,\lambda), y(o,\alpha,\lambda)=\alpha$ представлено в виде $y(s,\alpha,\lambda)=Y(s)\cdot\alpha+o(|\alpha|)$, где $Y(s)$ - фундаментальная матрица для системы (2), $Y(o)=E.$

Доказательство.

По теореме 1 $y(s,\alpha,\lambda), y(o,\alpha,\lambda)=\alpha$ есть решение системы (3). То есть

$$y(s,\alpha,\lambda)=Y(s)\cdot\alpha+Y(s)\cdot\int_0^s Y^{-1}(\xi)f_k(\xi,y(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)d\xi.$$

Убедимся, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{|\alpha|}Y(s)\int_0^s Y^{-1}(\xi)f_k(\xi,y(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)d\xi=0$ равномерно относительно $(s,\lambda)\in[o;w]\times\Lambda(s).$ Заметим, что по условию теоремы $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f_k(s,y,\lambda)}{|y|}=0$.

Это означает, что $\forall\varepsilon>0\exists\delta_1\in(0;\delta]:$ $:\forall y(|y|<\delta_1)\left|\frac{f_k(s,y,\lambda)}{|y|}\right|\le\varepsilon\Rightarrow|f_k(s,y,\lambda)|<\varepsilon\cdot|y|$.

Из того, что $y(s,\alpha,\lambda), y(o,\alpha,\lambda)=\alpha$ - решение системы (1), следует:

$$\forall s\in[0;w]\,\dot{y}(s,\alpha,\lambda)=L(s)\cdot y(s,\alpha,\lambda)+f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda),$$

$$\int_0^s\dot{y}(s,\alpha,\lambda)=L(s)\cdot y(s,\alpha,\lambda)+f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda),$$

$$\int_0^s\dot{y}(\xi,\alpha,\lambda)d\xi=\int_0^s(L(\xi)y(\xi,\alpha,\lambda)+f_k(\xi,y(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)d\xi,$$

$$\int_0^s\dot{y}(\xi,\alpha,\lambda)d\xi=y(\xi,\alpha,\lambda)\Big|_0^s=y(s,\alpha,\lambda)-y(0,\alpha,\lambda)=$$

$$=y(s,\alpha,\lambda)-\alpha.$$

Следовательно:

$$y(s,\alpha,\lambda)=\alpha+\int_0^s(L(\xi)\cdot y(\xi,\alpha,\lambda)+f_k(\xi,y(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)d\xi.$$

Учитывая, что $\|L(\cdot)\|$ - норма матрицы $L(s)$ и $|f_k(s,y,\lambda|<\varepsilon|y|$, получим

$$|y(s,\alpha,\lambda)|\le|\alpha|+\int_0^s(\|L(\cdot)\|\cdot|y(\xi,\alpha,\lambda|+\varepsilon\cdot|y(\xi,\alpha,\lambda)|)d\xi,$$

$$|y(s,\alpha,\lambda)|\le|\alpha|+\int_0^s(\|L(\cdot)\|+\varepsilon)\cdot|y(\xi,\alpha,\lambda)|)d\xi.$$

По лемме Гроноулла - Беллмана[1] получаем

$$|y(s,\alpha,\lambda)|\le|\alpha|\cdot exp(\int_0^s(\|L(\cdot)\|+\varepsilon)d\xi),$$

$$|y(s,\alpha,\lambda)|\le|\alpha|\cdot exp((\|L(\cdot)\|+\varepsilon)\cdot w).$$

Следовательно, имеем $\lim\limits_{\alpha\to 0}y(s,\alpha,\lambda)=0$ равномерно относительно $(s,\lambda)\in[0;w]\cdot\Lambda\cdot(\alpha),$ $\frac{|y(s,\alpha,\lambda)|}{|\alpha|}\le\exp((\|A(\cdot)\|+\varepsilon)\cdot w)$ - ограничено на множестве $[0;w]\cdot W(\delta_1)\cdot\Lambda(\delta_1)$. Убедимся, что при $\forall\alpha\ne 0$ на множестве $[0;w]\cdot W(s)\cdot\Lambda(\delta)$.

Пусть $\exists s^*\in[0;w]$, при котором $y(s^*,\alpha,\lambda)=0.$ Это означает, что $y(s,\alpha,\lambda)$ - решение системы (1), которое удовлетворяет начальному условию $y(0,\alpha,\lambda)=\alpha.$

Следовательно, существует два решения $y(s,\alpha,\lambda)$ и $y\equiv 0$, удовлетворяющих одному начальному условию. В силу теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра решения должны совпадать. Это противоречит тому, что $y(0,\alpha,\lambda)=\alpha.$, где $\alpha \neq 0.$

Следовательно, $\forall s \in [0;w], \forall \alpha \in W(\delta_0)$ и $\forall \lambda \in \Lambda(\delta)$ $y(s,\alpha,\lambda) \neq 0$.

Так как $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_k(s,y,\lambda)}{|y|}=0$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda)}{|\alpha|}=$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda)\cdot|y(s,\alpha,\lambda)}{|y|(s,\alpha,\lambda)\cdot|\alpha|}=0$ равномерно относительно $(s,\lambda)\in[0,w]\times\Lambda(\delta^*)$. Фундаментальная матрица $Y(s)$ ограничена, $Y^{-1}(s)$ ограничена, следовательно, нормы $\|Y(\cdot)\|$, $\left\|Y^{-1}(\cdot)\right\|$ существуют. Можно выбрать K>0 так, что $\|Y(\cdot)\|\le K$ и $\left\|Y^{-1}(\cdot)\right\|\le K$.

Тогда из того, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda)}{|\alpha|}=0,$ следует, что $\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0;\delta^*]$: при $\forall\alpha\in W(\delta)$

$$\frac{|f_k(s,y(s,\alpha,\lambda),\lambda)|}{|\alpha|}<\frac{\varepsilon}{K^2\cdot w}.$$

Введем обозначение: $\gamma=(\alpha,\lambda)$.

$$\frac{1}{|\gamma|}\left|Y(s)\cdot\int_0^s Y^{-1}(\xi)f_k(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)d\xi\right|\le\|Y(\cdot)\|\cdot\left\|Y^{-1}(\cdot)\right\|\times$$

$$\times\int_0^w\frac{|f_k(\xi,y(\xi,\alpha,\lambda),\lambda|\cdot|\alpha|}{|\alpha||\gamma|}d\xi\le\frac{K^2\cdot\varepsilon\cdot w}{K^2\cdot w}<\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\gamma\to 0}\dfrac{1}{|\gamma|}\cdot\int_0^s Y^{-1}(\xi)f_k(\xi,y(\xi,\alpha,$ $\lambda),\lambda)d\xi=0$ равномерно относительно $(s,\lambda)\in[o,w]\cdot\Lambda(\delta)$ и $y(s,\gamma)=Y(s)\cdot\alpha+0(|\gamma|)$.

Теорема доказана.

Следовательно, решение системы (1) можно записать в виде $y(s,\gamma,\lambda)=Y(s)\cdot\alpha+Y(s)\cdot\int_0^s Y^{-1}(\xi)\times$ $\times f_k(\xi,Y(\xi)\alpha,\lambda)d\xi+0\left(|\gamma|^k\right)$. Отсюда при $s=w$ получим $y(w,\gamma)=Y(w)\cdot\alpha+F_k(\gamma)+0\left(|\gamma|^k\right),$

где $F_k(\gamma)=Y(w)\cdot\int_0^w Y^{-1}(\xi)f_k(\xi,Y(\xi)\cdot\alpha,\lambda)d\xi.$

Найдем периодическое решение для системы (1):

$$y(w,\gamma)=Y(w)\cdot\alpha+F_k(\gamma)+0\left(|\gamma|^k\right)=\alpha,$$

$$(Y(w)-E)\cdot F_k(\gamma)+0\left(|\gamma|^k\right)=0 .$$

Таким образом, для того чтобы $y(s,\gamma)$ было ненулевым w-периодическим решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\gamma(\alpha\neq 0)$, удовлетворяющий равенству:

$L\alpha+F_k(\gamma)+o\left(|\gamma|^k\right)=0$, в котором $L=Y(w)-E.$ (4)

Матрица L особенная, в противном случае решение может быть только нулевым. Пусть $rangL=p,$ где $0<p<n.$

С помощью элементарных преобразований матрицу L приведем к виду $L=\left(L_1,\overline{L_1}\right),$ где L_1 - матрица размерности $(p\times n),\overline{L_1}-$ нулевая матрица размерности $((n-p)\cdot n)$.

Тогда, полагая $F_k(\gamma)=colon(F_k(\gamma),F_k(\gamma))$, $F_k(\gamma)$, $F_k(\gamma)$- вектор - функции k-го порядка, $K>1$, систему (4) представим в виде

$$L_1\alpha+\overline{F_k}(\gamma)+o_1\left(|\gamma|^k\right)=0,$$

$$\overline{\overline{F}}_k(\gamma)+o_2\left(|\gamma|^k\right)=0, \qquad (5)$$

где L_1-pxn- матрица, $rangL_1=P,$ при любом $i\in\{1,2\}\lim\limits_{\gamma\to 0}\dfrac{o_i\left(|\gamma|^k\right)}{|\gamma|^k}=0.$

Систему (5) заменой переменных $\gamma=\rho\cdot l,\rho>0,\left(\alpha_i=\rho\cdot l_i,i=\overline{1,...n},\lambda_j=\rho\cdot l_j,j=\overline{1,...m}\right),$ $l\in E_{n+m},|l|\le\Delta,\Delta>1-$ некоторое число можно свети к системе

$$L_2l+\rho^{k-1}\overline{F_k}(l)+O_1(\rho,|l|)=0,$$

$$\overline{\overline{F_k}}(l)+O_2(\rho,|l|)=0 , \qquad (6)$$

в которой $L_2=\left(L_1,\overline{\overline{L_1}}\right),$ где $\overline{\overline{L_1}}$ - нулевая матрица размерности $(p\times m).$

Теорема 3. Если при любом $l(|l|=1)colon(L_2l,\overline{\overline{F_k}}(l))\neq 0$, то существует окрестность точки $\gamma=0$, в которой нет ненулевых решений системы (6)[2].

Доказательство. Из непрерывности функции $|colon(L_2 l, \overline{\overline{F_{k+1}}}(l)|$ на множестве $\{l : |l| = 1\}$ следует существование числа $m > 0$, удовлетворяющего неравенству $|colon(L_2 l, \overline{\overline{F_k}}(l))| \geq m$ при любом $l(|l| = 1)$. Из того, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^{k-1}\overline{F_k}(l) + O_1(\rho,|l|\right) = 0, \lim\limits_{\rho\to 0} O_2(\rho,|l|) = 0$ равномерно относительно $l(|l| = 1)$, следует существование числа $\rho^* > 0$, такого, что $\left|\rho^{k-1}\overline{F_k}(l) + O_1(\rho,|l|\right| < m/3, \left|O_2(\rho,|l|)\right| < m/3$ при любом $\rho \in \left(o,\rho^*\right]$. Следовательно, при любом $\gamma \in \left\{\gamma : \gamma = \rho l, \rho \in (0,\rho^*\right], |l| = 1\left\} \right| colon(L_2 l, \overline{\overline{F_k}}(l)\Big| +$
$+ colon(\rho^{k-1}\overline{F_k}(l), 0) + colon(O_1(\rho,|l|, O_2(\rho,|l|))| \geq m/3$.

Теорема доказана.

Пусть существует точка $l^*\left(\left|l^*\right| + 1\right)$, удовлетворяющая равенству

$$colon(L_2 l^*, \overline{\overline{F_k}}(l^*)) = 0.$$

Тогда систему (6) можно записать как

$$L_2 v + O^*(\rho,|l|) = 0,$$

$$D(l^*)v + \sum_{c=2}^{k} \mathrm{P}_i(l^*,v) + O^{**}(\rho,|l|) = 0, \qquad (7)$$

где $v = l - l^*, D(l^*)$ - значение матрицы Якоби вектор-функции $\overline{\overline{F_k}}(l)$ в точке $l^*, \mathrm{P}_i\left(l^*,v\right)$ – вектор-форма порядка i относительно v, $\lim\limits_{\rho\to 0} O^*(\rho,|l|) = \lim\limits_{\rho\to 0} O^{**}(\rho,|l|) = 0$ равномерно относительно $l(|l| \leq \Delta)$.

Теорема 4. Если $rangcolon\left(L_2, D(l^*)\right) = n,\ l_\alpha^* \neq 0,$ то существует окрестность точки $\gamma = 0,$ в которой система (7) имеет ненулевое решение, система (1) имеет ненулевое w-периодическое решение в окрестности нулевого решения[3].

Доказательство. Для определенности положим, что минор n-го порядка матрицы $\left(L_2, D(l^*)\right)$, отличный от нуля, расположен на первых n столбцах этой матрицы. Следовательно, $colon\left(L_2, D(l^*)\right)v = M_1 v_1 + M_2 v_2,\quad \det M_1 \neq 0, M_2 - n \times m -$ матрица, $v = (v_1, v_2)$. Выражение $\sum\limits_{i=2}^{k+1} \mathrm{P}_i(l^*,v)$ представим равенством $\sum\limits_{i=2}^{k+1} \mathrm{P}_i(l^*,v) = Q_1(v_1) + Q_2(v_1,v_2)$, $\lim\limits_{v_1\to 0} Q_1(v_1)/|v_1| = 0,\ \lim\limits_{v2\to 0} Q_2(v_1,v_2) = 0$ равномерно относительно $v_1\left(|v_1| \leq 1 + \Delta\right)$.

Система (8) примет вид

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 + colon\left(0, Q_1(v_1)\right) + colon\left(0, Q_2(v_1,v_2)\right) +$$
$$+ colon(O^*(\rho,|l|), O^{**}(\rho,|l|)) = 0.$$

Оператор Γ определим равенством

$$\Gamma v_1 = -M_1^{-1}(M_2 v_2 + colon(0, Q_2(v_1,v_2)) + colon(O^*(\rho,|l|)).$$

Из того, что $\lim\limits_{v_1\to 0} colon(0, Q_1(v_1))/|v_1| = 0,$ следует существование такого числа $\delta_1 \in (0,\delta],$ что при любом $v_1(|v_1| \leq \delta_1)\left|M_1^{-1} colon(0, Q_1(v_1))\right| < \delta_1/4.$ Учитывая, что $\lim\limits_{v_2\to 0} M_1^{-1} M_2 v_2 = 0,$ $\lim\limits_{v_2\to 0} M_1^{-1} colon(0, Q_2(v_1,v_2)) = 0$ равномерно относительно $v_1(|v_1| \leq \delta_1),\ \lim\limits_{\rho\to 0} M_1^{-1} colon(O^*(\rho,|l|), O^{**}(\rho,|l|)) = 0$ равномерно относительно $l(|l| \leq \Delta),$ число $\delta_2 \in (0,\delta]$ выберем так, чтобы при любых $v_2\left(|v_2| \leq \delta_2\right),$ $\rho \in (0,\delta_2]$ выполнялись неравенства

$$\left|M_1^{-1} M_2 v_2\right| < \delta_1/4, \left|M_1^{-1} colon(0, Q_2(v_1,v_2))\right| < \delta_1/4,$$
$$\left|M_1^{-1} colon(O^*(\rho,|l|)\right| < \delta_1/4.$$

Следовательно, при любых фиксированных $v_2\left(|v_2| \leq \delta_2\right), \rho \in (0,\delta_2]$ и любом $v_1\left(|v_1| \leq \delta_1\right), |\Gamma v_1| < \delta_1.$ Из определения оператора Γ следует его непрерывность на множестве $\{v_1 : |v_1| \leq \delta_1\}.$ Поэтому существует точка $v_1\left(|v_1| \leq \delta_1\right),$ удовлетворяющая равенству $\Gamma v_1 = v_1$.

Фиксируем $v_2^*\left(\left|v_2^*\right| \leq \delta_2\right), \rho^* \in (0,\delta_2]$. Тогда существует точка $v_1^*\left(\left|v_1^*\right| \leq \delta_1\right),$ такая, что $\Gamma v_1^* = v_1^*$. Решение системы (6) определится равенством $\gamma^* = \rho^* \bar{l}$, в котором $\bar{l} = l^* + v^*, v^* = \left(v_1^*, v_2^*\right), \gamma^* = \left(\alpha^*, \lambda^*, \mu^*\right).$ Так как $l_\alpha^* \neq 0,$ то числа δ_1, δ_2 можно выбрать так, чтобы выполнилось неравенство $\alpha^* \neq 0.$ Это значит, что при таком выборе чисел $\delta_1, \delta_2, \gamma^*$ - ненулевое решение системы (6), $x(t, \alpha^*, \lambda^*, \mu^*)$ - ненулевое w-периодическое решение системы (2). Теорема доказана.

[1] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

[2] *Терехин М.Т.* Ненулевое периодическое решение одной нелинейной системы дифференциальных уравнений Матье // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. 2008. □ 4. С. 115-136.

[3] Там же.

Поступила в редакцию 06.03.2014 г.