Цена информации в задачах оценки инвестиционных проектов с нечетко определенными денежными потоками

© 2013 Волкова Елена Сергеевна
кандидат физико-математических наук, доцент
© 2013 Гисин Владимир Борисович
кандидат физико-математических наук, профессор
Финансовый университет
125993, г. Москва, Ленинградский пр., д. 49
E-mail: vgisin@fa.ru

Вводится понятие цены уменьшения неопределенности в задачах с нечетко определенными финансовыми данными. Предложен метод вычисления цены информации при оценке инвестиционных проектов на основе чистого дисконтированного дохода.

Ключевые слова: мера неопределенности, информация, денежный поток с нечеткими платежами, цена информации.

Введение

Выбор математических инструментов финансового моделирования в условиях неопределенности существенно зависит от ее природы[1]. Например, если относительно некоторой величины известен только интервал ее возможных значений ("пессимистические" и "оптимистические" оценки), применяются методы интервального анализа. Если известно вероятностное распределение неопределенной величины внутри интервала ее значений (в этом случае говорят о случайной величине), применяются вероятностные методы. Заметим, что использование вероятностных методов обоснованно только тогда, когда выполняется ряд условий, допускающих в определенном смысле "физическую" проверку. Промежуточное положение между интервальными и вероятностными методами занимают методы теории нечетких множеств. В теории нечетких множеств не предполагается, что неопределенная величина подчиняется объективным закономерностям (как в теории вероятностей), но в то же время на интервале ее значений задано некоторое возможностное распределение, отражающее представления экспертов о большей или меньшей реалистичности в принципе возможных значений. Отказ от предположений о распределении величин внутри интервалов неопределенности при интервальной трактовке может привести к неоправданному росту неопределенности и потере информации в ходе вычислений. Подходы, основанные на методах теории нечетких множеств и связанных с ними так называемых "мягких вычислениях", позволяют трансформировать оценку возможности исходных данных в оценку возможности результатов. Эти оценки не имеют такой точной интерпретации, как вероятностные, тем не менее они дают полезную информацию для принятия обоснованных решений.

Естественно предполагать, что снижение неопределенности исходных данных приводит к более точным результатам. В статье предложен подход к определению цены информации, приводящей к снижению неопределенности, в моделях, основанных на теории нечетких множеств. В общем виде подход может быть описан следующим образом. Пусть имеется процедура F, которая по нечетким входным данным X выдает финансовый результат $Y = F(X)$. Обозначим через $U(X)$ неопределенность, связанную с исходными данными. Предположим, что за счет получения дополнительной информации исходные данные были уточнены и трансформировались в X'. Объем полученной информации I измеряется уменьшением неопределенности. Стоимость этой информации можно оценить приращением результата $\Delta Y = F(X') - F(X)$. Цена информации в этом случае составляет $\Delta Y / I$.

В статье рассматриваются ситуации, когда процедура F связана с принятием решения об участии в инвестиционном проекте и когда процедура F выдает оптимальное решение.

Нечеткие величины и мера их неопределенности

Напомним, что нечеткое подмножество A множества X задается своей функцией принадлежности $\mu_A : X \to [0;1]$. Множество A может трактоваться как свойство, а величина $\mu_A(x)$ указывает, в какой мере элемент *x* обладает этим свойством. Пусть *A* - нечеткое подмножество множества *X* и α - число из промежутка (0; 1]. Множество всех тех x, для которых $\mu_A(x) \geq \alpha$, называется множеством уровня α. Мы будем обозначать его A^α. Следуя устоявшейся традиции, будем понимать под нечеткой величиной нечеткое подмножество *A* множества действительных чисел *R* с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) все уровневые множества A^α являются замкнутыми промежутками вида $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$;

2) $\mu_A(a) = 1$ для некоторого *a*;

3) множество $\{x \mid \mu_A(x) > 0\}$ ограничено.

Замыкание множества $\{x \mid \mu_A(x) > 0\}$ называется носителем нечеткой величины *A* и обозначается supp *A*. Это множество считается множеством нулевого уровня и обозначатся также через A^0. "Обычное" четкое число *a* можно рассматривать как нечеткое с носителем, состоящим из единственной точки *a* и функции принадлежности μ такой, что $\mu(a) = 1$ и $\mu(x) = 0$ при $x \neq a$.

Нечеткие величины, описываемые выражениями типа "примерно *a*", обычно представляют так называемыми треугольными нечеткими числами. Треугольное нечеткое число *A* задается тройкой чисел $(a^L; a; a^R)$ такой, что $a^L \leq a \leq a^R$. Отрезок $[a^L, a^R]$ является носителем множества *A*, а уровневые множества имеют следующий вид:

$$A^\alpha = [(1-\alpha)a^L + \alpha a; (1-\alpha)a^R + \alpha a].$$

Для треугольных нечетких чисел мы будем использовать обозначение $A = tfn(a^L; a; a^R)$.

Арифметические операции с нечеткими величинами определяются на основе принципа обобщения. Применительно к треугольным числам они сводятся к уровневым интервальным операциям: сумма треугольных нечетких чисел $A = tfn(a^L; a; a^R)$ и $B = tfn(b^L; b; b^R)$ - это треугольное нечеткое число $A + B = tfn(a^L + b^R; a + b; a^R + b^R)$.

Для сравнения нечетких величин используются многочисленные методы в зависимости от специфики решаемой задачи. Широкое распространение получили индексы, основанные на мерах возможности и необходимости. Возможность отношения *A* □ *B* оценивается числом

$$Pos(A \leq B) = \sup\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \mid x \leq y;\ x, y \in \boldsymbol{R}\},$$

необходимость - числом

$$Nec(A \leq B) = \inf\{\sup\{\max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) \mid x \leq y, y \in \boldsymbol{R}\} \mid x \in \boldsymbol{R}\}.$$

Для треугольных чисел соотношение $Pos(A \leq B) \geq \alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^L(\alpha) \leq b^R(\alpha)$, а соотношение $Nec(A \leq B) \geq \alpha$ - тогда и только тогда, когда $a^R(1-\alpha) \leq b^L(\alpha)$. В частности, $Pos(A \leq b) = 1$, если $a \leq b$, и $Pos(A \leq b) = \mu_A(b)$, если $b \leq a$. Полагая

$$Pos(A = b) = \min\{Pos(A \leq b), Pos(A \geq b)\},$$

получаем $Pos(A = b) = \mu_A(b)$.

Аналогично $Nec(A \leq b) = 0$, если $b \leq a$, и $Nec(A \leq b) = 1 - \mu_A(b)$, если $a \leq b$.

Для оценки неопределенности нечетких величин используются различные меры[2]. Наиболее употребительными являются следующие меры, по существу однозначно определяемые естественными требованиями:

1. Мера Хартли:

$$H(A) = K\int_0^1 \ln\left[1 + mes(A^\alpha)\right] d\alpha,$$

где $mes(A^\alpha)$ - мера (длина) уровневого множества A^α;

K - некоторая положительная константа.

2. Мера нечеткости (расстояние до ближайшего четкого множества):

$$\rho(A) = mes(\mathrm{supp}(A)) - \int_{\mathrm{supp}(A)} |2\mu_A(x) - 1|\, dx.$$

3. Энтропийная неопределенность (по Больцману):

$$B(A) = -K\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x) \ln \mu_A(x) dx.$$

Параллельно с мерой $B(A)$ используется также близкая к ней мера

$$S(A) = -K\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mu_A(x) \ln \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x)) \ln(1 - \mu_A(x))\big) dx.$$

Для треугольного нечеткого числа вида $A = tfn(a - \delta, a, a + \delta)$ имеем:

$$H(A)=\frac{1+2\delta}{2\delta}\ln(1+2\delta)-1\,,\ \rho(A)=\delta\,;\ B(A)=0{,}5\delta\,;$$

$$S(A)=\delta\,.$$

Каждая из приведенных мер измеряет свою специфическую неопределенность. Мера Хартли *H*(*A*) измеряет “недоопределенность” величины *A*. Энтропийные меры *B*(*A*) и *S*(*A*) измеряют размытость границы между возможными и невозможными значениями величины *A*. Например, интервальная величина (функция принадлежности равна 1 на интервале возможных значений и нулю вне него) имеет нулевую энтропийную меру.

В случае, когда неопределенность возникает при определении денежной суммы, имеет смысл оценивать относительную неопределенность. В формуле $\Delta Y/I$, определяющей цену информации, величина *I* не должна зависеть от масштаба.

Покажем, как можно модифицировать меру Хартли, чтобы обеспечить независимость *I* от масштаба. Выберем некоторую эталонную нечеткую величину *C*, неопределенность которой примем за единицу измерения. Рассмотрим нечеткую величину *A*, носитель которой не содержит нуля. Пусть *a* - число такое, что $\mu_A(a)=1$. Обозначим через A_1 нечеткую величину с функцией принадлежности $\mu_{A_1}(x)=\mu_A(x/a)$ и положим

$$H_m(A)=K\int_0^1 \ln\left[1+\frac{mes(A_1^{\alpha})}{mes(C_1^{\alpha})}\right]d\alpha\,. \qquad (1)$$

Если C_1 - интервальная нечеткая величина и $mes(C_1^{\alpha})=1$ для всех $\alpha>0$ (например, величина C_1 имеет в качестве носителя промежуток [0,5; 1,5] и ее функция принадлежности тождественно равна единице на носителе), то $H_m(A)=H(A_1)$. Таким образом, модификация меры Хартли, задаваемая формулой (1), может рассматриваться как некоторое ее обобщение, связанное с выбором эталонной нечеткой величины. По существу $H_m(A)$ измеряет неопределенность величины A, когда отклонение ее значений от основного значения измеряется в процентах. В дальнейшем мы будем использовать в качестве эталонной единицы треугольную нечеткую величину, соответствующую относительной погрешности в 1 %, $C_1=tfn(0{,}99;1;1{,}01)$. Полагая $K=\dfrac{1}{\ln 2}$, получаем $H_m(C_1)=1$. Для $A=tfn((1-p)a;a;(1+p)a)$ имеем $H_m(A)=\log_2(1+p)$.

Ограничение, связанное с тем, чтобы носитель величины *A* не содержал нуля, является несущественным для многих практических задач. Как правило, исходные денежные величины имеет вполне определенный знак, а величины, близкие к нулю, получаются в процессе вычислений. Таким образом, если оценивать неопределенность исходных величин, требование их знакоопределенности не является ограничительным. Для измерения неопределенности величин, близких к нулю, введем дополнительную эталонную величину C_0 (нечетко определенный ноль) и будем измерять неопределенность таких величин формулой, подобной формуле (1):

$$H_m(A)=K\int_0^1 \ln\left[1+\frac{mes(A^{\alpha})}{mes(C_0^{\alpha})}\right]d\alpha\,. \qquad (2)$$

Заметим, что выбор C_0 зависит от используемой денежной единицы и в некотором смысле задает масштаб. Например, в зависимости от решаемой задачи близость к нулю может оцениваться копейками, рублями или более крупными денежными единицами. В соответствии с этим должна выбираться эталонная величина C_0.

В случае энтропийных мер неопределенности независимость от масштаба можно обеспечить, полагая $I=\log_2\dfrac{U(X)}{U(X')}$.

Цена информации в инвестиционных проектах с нечетко определенными денежными потоками

Методы теории нечетких множеств применяются для анализа инвестиционных проектов уже более четверти века[3]. Приведем необходимые определения. Проект с нечеткими платежами продолжительности *n* временных периодов задается потоком платежей

$$CF=(A_0,A_1,\dots,A_n)\,, \qquad (3)$$

каждая компонента которого (нечеткая величина A_i) представляет собой баланс инвестиционных затрат и чистого дохода за соответствующий период.

Величина

$$NPV(CF)=A_0+\delta_1A_1+\delta_2A_2+\ldots+\delta_nA_n\,,$$

где δ_i - коэффициент дисконтирования, называется чистым приведенным доходом проекта (3) и является, вообще говоря, нечеткой величиной. В случае, когда все компоненты потока платежей четкие величины, критерием эффективности проекта является выполнение условия $NPV > 0$. Будем называть проект с нечеткими платежами эффективным, если необходимость выполнения условия $NPV > 0$ превосходит некоторое пороговое значение *h*, определяемое отношением к риску. Более формально: проект эффективен, если

$$Nec(NPV > 0) \geq h \,. \tag{4}$$

Рассмотрим некоторый проект, который неэффективен по критерию (4). После уточнения исходных нечетких величин поток платежей (3), характеризующий проект, может быть заменен потоком платежей

$$CF' = (A_0', A_1', \ldots, A_n') \,. \tag{5}$$

Если чистый приведенный доход, соответствующий (5), удовлетворяет критерию (4), проект будет принят и принесет доход, равный $NPV' = NPV(CF')$. Можно считать, что величина дохода соответствует стоимости полученной информации I. Ценой информации естественно считать минимальное значение отношения NPV'/I, где минимизация проводится по уточнениям, приводящим к принятию проекта.

Поясним существо предложенного подхода на примере.

Пример. Проект длится два года. Начальные инвестиции составляют примерно 1000 денежных единиц. Отдача по годам составляет примерно 600 единиц за первый год и примерно 700 - за второй. Для вычисления чистого приведенного дохода используется ставка 15 %. В качестве порога значимости примем величину 0,8 (мы пренебрегаем сценариями, возможность которых оценивается ниже, чем 20 %).

Если считать, что значения денежных величин определены точно, то чистый приведенный доход равен 51,04 и проект принимается. Предположим теперь, что неопределенность планируемых показателей представлена треугольными нечеткими числами (для упрощения вычислений мы считаем их симметричными):

$$A_0 = tfn(-1025; -1000; -975) \,;$$

$$A_1 = tfn(550; 600; 650) \,; \quad A_2 = tfn(600; 700; 800) \,.$$

Чистый приведенный доход в этом случае также оказывается нечеткой величиной:

$$V = (-93{,}05; 51{,}04; 195{,}13) \,.$$

Так как $\mu_V(0) = 0{,}35$, то $Nec(V > 0) = 0{,}35$, и, значит, условие принятия проекта не выполняется.

Вычислим неопределенность, связанную с потоком платежей $CF = (A_0, A_1, A_2)$. Сначала, используя модифицированную меру Хартли, находим неопределенность отдельных платежей. Имеем

$$H_m(A_0) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{2p(1-\alpha)}{2 \cdot 0{,}01 \cdot (1-\alpha)}\right) d\alpha =$$

$$= \log_2(1 + 100p) \,,$$

где $p = \frac{25}{1000}$. Следовательно:

$$H_m(A_0) = \log_2 3{,}5 \,.$$

Аналогично $H_m(A_1) = \log_2 9{,}33$ $H_m(A_2) = \log_2 15{,}29$. Таким образом:

$$U(CF) = 8{,}96 \,.$$

Найдем теперь, при каких уточнениях проект можно принять. Пусть

$$A_0' = tfn(-(1+p_0) \cdot 1000; -1000; -(1-p_0) \cdot 1000) \,;$$

$$A_1' = tfn((1-p_1) \cdot 600; 600; (1+p_1) \cdot 600) \,;$$

$$A_1' = tfn((1-p_2) \cdot 600; 600; (1+p_2) \cdot 600) \,, \tag{6}$$

где $0 \leq p_i \leq 1$, $i = 0,1,2$ - уточнения исходных величин, а $V' = (v^L; 51{,}04; v^R)$ - соответствующий нечеткий чистый приведенный доход.

Условие $Nec(V > 0) \geq h$ равносильно тому, что $v^L \geq v$, где v - решение уравнения $\mu_V(v) = 1 - h$. При $h = 0{,}8$ получаем $v = -12{,}75$. (7)
Таким образом:

$$-(1+p_0) \cdot 1000 + \frac{(1-p_1) \cdot 600}{1{,}15} +$$

$$+ \frac{(1-p_2) \cdot 700}{1{,}15^2} \geq -12{,}75 \,.$$

Вычислим теперь неопределенность нечетких платежей уточненного потока $CF' = (A_0', A_1', A_2')$:

$$H_m(A_i') = \log_2\left(1 + 100 p_i\right), \; i = 0,1,2 \,;$$

$$U(CF') = \sum_{i=0}^{2} \log_2(1 + 100 p_i) \ .$$

Объем информации, необходимый для уточнения, составляет величину

$$I = U(CF') - 8{,}96 \ .$$

Задача минимизации I сводится к задаче минимизации произведения

$$(1 + p_0)(1 + p_1)(1 + p_2)$$

при выполнении условий (6) и (7). Искомый минимум достигается при

$$p_0 = 1{,}81\% \ ; \ \ p_1 = 4{,}39\% \ ; \ \ p_2 = 4{,}31\% \ .$$

Соответственно, $U(CF') = 6{,}33$ и $I = 2{,}64$.

Наиболее распространенные способы дефаззификации нечеткой величины V' дают значение 51,04. Поэтому цена информации не должна превосходить значение 19,36 денежной единицы.

Сходный результат получается, если для измерения неопределенности берется одна из энтропийных мер.

Заключение

В статье введено понятие цены информации в задачах принятия решений экономического характера с нечетко определенными денежными величинами и предложен метод ее вычисления. Предложенный подход проиллюстрирован на примере выбора инвестиционного проекта с нечеткими платежами на основе чистого приведенного дохода. Подобным же образом цена информации, направленной на снижение нечеткости, может быть получена и в других задачах, в частности в задачах линейной оптимизации.

---

[1] См.: *Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов. М., 2002; *Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. М., 2012 (интернет-версия); *Chen S.-H., Wang P.P.* (eds.) Computational Intelligence in Economics and Finance. Berlin; Heidelberg; N. Y., 2002; *Dymowa L.* Soft Computing in Economics and Finance. Berlin, Heidelberg, 2011.

[2] *Klir G.J.* Uncertainty and Information: foundations of generalized information theory. Hoboken, New Jersey, 2006.

[3] *Buckley J.J.* The Fuzzy Mathematics of Finance // Fuzzy Sets and Systems. 1987. Vol. 21. P. 257-273; *Carlsson C., Fuller R.* Capital Budgeting Problems with Fuzzy Cash Flows // Mathware & Soft Computing. 1999. Vol. 6. P. 81-89; *Buckley J.J., Eslami E., Feuring T.F.* Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Heidelberg; N. Y., 2002; *Kuchta D.* Optimization with Fuzzy Present Worth Analysis and Applications. P. 43-70; *Sewastjanov P., Dymowa L.* On the Fuzzy Internal Rate of Return // Kahraman C. (ed.) Fuzzy Engineering Economics with Applications. Berlin; Heidelberg, 2008. P. 243-288.

Поступила в редакцию 05.09.2013 г.