Оптимизация финансово-экономических планов компании на основе моделирования

© 2013 Суменков Михаил Сергеевич
доктор экономических наук, профессор
© 2013 Суменков Сергей Михайлович
кандидат экономических наук, доцент
© 2013 Новикова Наталья Юрьевна
Уральская государственная юридическая академия
620066, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 21
E-mail: ssm0001@yandex.ru

Рассматривается проблема, связанная с оптимизацией финансово-экономических планов компании с помощью приближенных моделей и предложенных методов их решения, учитывающих блочную структуру задачи и дающих инструментарий оценки принимаемых планово-управленческих решений.

Ключевые слова: оптимальный план, оптимальная стратегия, финансовые ресурсы, экономико-математическая модель, управление запасами, управленческие решения.

В работе[1] сформулирована задача выбора оптимальных плановых решений экономической деятельности предприятия, которая перетекла в задачу линейного программирования сравнительно большой размерности и может быть решена одним из существующих методов, например симплекс-методом.

В результате решения указанной задачи будут получены оптимальный план и система двойственных оценок, с помощью которых можно оценить, например, его устойчивость к вариации ряда параметров исходной информации.

Однако такое формальное решение поставленной задачи не объясняет причины того, почему данный план является оптимальным, не выявляется стратегия экономического планирования, которая должна учитывать динамику финансовой деятельности предприятия. Поэтому является актуальной разработка таких приближенных моделей и методов их решения, которые, учитывая особенности задачи, например ее блочную структуру, позволяли бы понять причину оптимальности принимаемых решений, что дало бы лицу, принимающему решение (ЛПР), инструментарий оценки принимаемых планово-управленческих решений.

Можно выделить следующие четыре наиболее важные задачи, которые необходимо решать в первую очередь при формировании планов экономической деятельности компании и решение которых по существу фактически предопределяет все плановые решения:

1) задачу выбора оптимальной стратегии экономического планирования работы отдельного предприятия, входящего в структуру компании;

2) задачу оптимального распределения денежных ресурсов отдельного предприятия;

3) задачу оптимального распределения денежных ресурсов между предприятиями, входящими в компанию;

4) задачу оптимального прикрепления предприятий к поставщикам.

Рассмотрим каждую из сформулированных задач подробнее.

1. Задача выбора оптимальной стратегии планирования работы предприятия.

В силу того что эта задача является составной частью общей задачи финансового планирования компании, будем для определенности полагать, что ряд вопросов по выявлению управляющих параметров уже решен, а именно: установлены закупочные цены и цены реализации. Задача будет рассматриваться применительно к нефтеперерабатывающим компаниям и для каждого вида нефтепродукта в отдельности. В данном случае ее можно рассматривать как задачу динамического управления запасами[2], которая формулируется следующим образом. Необходимо найти максимум суммарной величины приведенной прибыли от приобретения, хранения и реализации определенного вида нефтепродукта.

Пусть на одном из предприятий известна производительность и начальный запас этого нефтепродукта. Закупочные и продажные цены на данный товар меняются со временем известным образом. Задан период планирования *T*, ($t \in \overline{1,T}$).

Введем следующие обозначения:

C^t - закупочная цена единицы нефтепродукта в период t;

P^t - цена реализации единицы готового нефтепродукта в период t;

υ_0 - запас нефтепродуктов на предприятии на начало периода планирования;

B - максимально возможный объем переработки нефтепродукта;

R^t - спрос на нефтепродукт в t-м периоде;

x^t - количество закупаемого нефтепродукта в t-м месяце;

y^t - количество реализуемого нефтепродукта в t-м месяце. Для упрощения вычислений с тем, чтобы не учитывать темпы инфляции и разновременность затрат, будем считать, что c^t и P^t скорректированы по этим показателям.

Задача формулируется следующим образом. Найти

$$max\sum_{t\in T}\left(P^t y^t - c^t x^t\right) \tag{1}$$

при следующих ограничениях:

1. Количество имеющегося в наличии нефтепродукта в конце t-го месяца не может превышать вместимость емкостей предприятия

$$\upsilon^{t-1}+\left(x^t-y^t\right)\le B,(t). \tag{2}$$

2. Ограничение на продажу нефтепродукта в t-м месяце

$$y^t \le R^t,(t). \tag{3}$$

3. Неотрицательность переменных

$$x^t\ge 0, y^t\ge 0,(t). \tag{4}$$

Рассмотрим ряд конкретных задач. Пусть $T = 1$, в этом случае задача определения плановых решений будет следующей. Найти

$$max\left(P^1y^1-c^1x^1\right) \tag{5}$$

при условиях

$$\upsilon^0+x^1-y^1\le B, \tag{6}$$

$$x^1\ge 0, \tag{7}$$

$$R^1\ge y^1\ge 0. \tag{8}$$

Для случая, когда $p^1 > c^1$, оптимальное решение очевидно $(\tilde{y}^1 = R, \tilde{x} = R-\upsilon^0)$; оптимальное значение функции цели

$$\left\{max\left(p^1y^1\right)\right\}=R^1\left(p^1-c^1\right)+c^1\upsilon^0. \tag{9}$$

В силу того что $\tilde{y}^1=\tilde{x}^1-\upsilon^0$, к концу месяца все запасы нефтепродукта будут реализованы и в следующем месяце $\upsilon_1 = 0$.

Если $T = 3$, то задача имеет следующий вид. Найти

$$max\left[p^1y^1+p^2y^2+p^3y^3-c^1x^1-c^2x^2-c^3x^3\right] \tag{10}$$

при условиях

$$\upsilon_0+x^1-y^1\le B, \tag{11}$$

$$\left(\upsilon_0+x^1-y^1\right)+x^2-y^2\le B, \tag{12}$$

$$\left[\left(\upsilon_0+x^1-y^1\right)+x^2-y^2\right]+x^3-y^3\le B, \tag{13}$$

$$0\le y^1\le R^1, 0\le y^2\le R^2, 0\le y^3\le R^3, \tag{14}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0. \tag{15}$$

Для решения задачи можно воспользоваться традиционными методами линейного программирования, но при этом явно не прослеживается динамика формирования поэтапных оптимальных решений. Для отслеживания динамики можно воспользоваться методами динамического программирования[3].

Пусть $f_T(\upsilon_0)$ - максимальная прибыль, получаемая от T-стадийного процесса принятия плановых решений, при предположении, что начальный запас нефтепродукта υ_0 и на всех стадиях используется оптимальная стратегия. Тогда функциональное уравнение будет иметь следующий вид:

$$f_T(\upsilon_0)=\max_{\{\upsilon^T,y^T\}}\left[P^Ty^T-c^Tx^T+\right.$$
$$\left.+f_{T-1}(\upsilon_{T-2}+x^{T-1}-y^{T-1})\right] \tag{16}$$

где $(x_{T-2}+x^{T-1}-y^{T-1})$ - запас на начало T-го периода.

По определению $f_0(x) = 0$ при

$$f_1(\upsilon_0)=\max_{\{x^1,y^1\}}(P^1y^1-c^1x^1)=R^1(p^1-c^1)+c^1\upsilon_0. \tag{17}$$

Для выяснения структуры оптимальной стратегии воспользуемся следующей теоремой[4]: $f_T(\upsilon)$ является линейной функцией по υ с коэффициентами, зависящими от цен $\{p^t\}$ и $\{c^t\}$:

$$f_t(\upsilon)=F_T(P^t,c^t)+\Phi_T(P^t,c^t)\upsilon \tag{18}$$

оптимальная стратегия не зависит от величины υ, а лишь от динамики цен. Выпишем множество ограничений для T-го периода переменных (x^T, y^T).

$$\upsilon_{T-1}+X^T-y^T\le B, \tag{19}$$

$$0\le y^T\le R^T, \tag{20}$$

$$x^t\ge 0. \tag{21}$$

Так как все функции линейны и по теореме f_T линейна относительно (x^T, y^T), тогда оптимальная точка f_T находится в одной из вершин многогранника, которые для данного случая можно все выписать в следующем порядке:

$$(0,\,0),\ (B - \upsilon_{T-1},\,0),(0,R^t),(B - \upsilon_{T-1} + R^*,\,R^T). \quad (22)$$

Поскольку первые две точки не предполагают продажи нефтепродукта, учитывая тот факт, что $P_T > c^T$, они не являются оптимальными для функции f_T. Для точки (0, R^t) предполагается, что $\upsilon_{T-1} \geq R^t$, в противном случае эта точка сдвигается на величину $R^T - \upsilon_{T-1}$, т.е. становится $(R^T - \upsilon_{T-1}, R)$. В случае, если эта точка является оптимальной, оптимальная стратегия является следующей: производится минимально необходимое приобретение нефтепродукта для полного удовлетворения спроса и не планируется наличие запаса нефтепродукта для следующего месяца. Значение функции цели будет

$$\tilde{f}_T = R^T(p^T - c^T) + f_{T-1}(\upsilon^0_{T-1}). \quad (23)$$

Для четвертой точки, в случае, если она окажется оптимальной, стратегия предполагает в T-м месяце приобретение максимально возможного количества нефтепродукта

$$\tilde{x}^T = B - \upsilon_{T-1} + R^T \quad (24)$$

при полном удовлетворении спроса $\tilde{y}^T = R^T$. Таким образом, для каждого календарного месяца периода планирования t, $t = 1, ..., T$ с учетом специфики задачи оптимальными стратегиями могут быть приобретение либо максимально возможного количества нефтепродукта

$$y^t = R^t, \quad (25)$$

$$x^t = B - \upsilon_{t-1} + R^T, \quad (26)$$

либо минимально необходимого для удовлетворения спроса количества нефтепродуктов:

$$y^t = R^t, \quad (27)$$

$$x^t = \begin{cases} 0, & \text{если } \upsilon_{t-1} \geq R^t \\ R^t - \upsilon_{t-1}, & \text{если } \upsilon_{t-1} < R^t \end{cases} \quad (28)$$

Выбор одной из стратегий зависит от динамики цен покупки и продажи нефтепродукта, но в последнем месяце периода планирования оптимальной стратегией является вариант с минимальным объемом закупки нефтепродукта. Для того чтобы создать необходимый запас для последующего периода, необходимо ввести дополнительные ограничения $\tilde{\upsilon}^T \geq A^T$, где A^T - минимально необходимый нереализованный запас нефтепродукта на конец периода планирования. Тогда в последнем месяце оптимальный объем закупок будет

$$\tilde{y}^T = R^t, \quad (29)$$

$$\tilde{x}^T = \begin{cases} R^T - \upsilon_{t-1} + A^T, & \text{если } \upsilon_{t-1} < R^t, \\ A^T - (\upsilon_{t-1} - R^T), & \text{если } \upsilon_{t-1} \geq R^T. \end{cases} \quad (30)$$

2. Задача оптимального распределения денежных ресурсов отдельного предприятия.

Существенной особенностью рассматриваемой задачи планирования финансовой деятельности предприятия является тот факт, что величина физических емкостей по хранению нефтепродуктов, как правило, не является реальным ограничением на любом предприятии, а ограничителями выступают финансовые возможности конкретных производств на предприятии, т.е. роль величин B^t будут выполнять величины максимально возможных объемов закупки нефтепродуктов при полном использовании выделенных средств. Такая замена величин не меняет оптимальной стратегии закупки и реализации отдельно взятого нефтепродукта, которая предусматривает полное использование выделяемых средств.

Учитывая изложенное, можно сформулировать следующую задачу, которая является одной из основных при формировании финансовых планов каждого предприятия: как оптимально использовать имеющиеся финансовые ресурсы, как оптимально их распределить для закупки каждого вида нефтепродуктов.

Математически задача может быть сформулирована для каждого календарного месяца периода планирования в отдельности следующим образом.

Введем обозначения. Пусть:

c_k^t - стоимость приобретения и доставки железнодорожным транспортом 1 т k-го нефтепродукта в t-м месяце;

a_k^t, A_k^t - минимально и максимально допустимые границы закупки k-го нефтепродукта в t-м месяце;

P_k^t - цена реализации k-го нефтепродукта в t-м месяце;

g^t - объем выделяемых денежных средств предприятию для приобретения, переработки и реализации всех нефтепродуктов в t-м месяце.

В данном случае экономико-математическая модель задачи определения оптимальных объемов закупки нефтепродуктов на каждом предприятии в отдельности в t-м месяце будет следующей. Найти

$$\max \sum_{k=1}^{4} (P_k^t - c_k^t) x_k^t \qquad (31)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{4} c_k^t x_k^t \le g^t \,, \qquad (32)$$

$$a_k^t \le x_k^t \le A_k^t, k \in 1{,}4, \qquad (33)$$

где x_k^t - искомые объемы закупки каждого вида нефтепродуктов в t-м месяце. При определении значений параметров a_k^t, A_k^t существенно используется информация о величине ожидаемого спроса на k-й нефтепродукт в t-м месяце R_k^t.

В силу линейности ограничений и функции цели рассматриваемой задачи можно утверждать, что в ее оптимальном плане все переменные, кроме одной, принимают граничные значения областей их вариации, т.е. либо $\tilde{x}_k^t = a_k^t$, либо $\tilde{x}_k^t = a_k^t$. Поэтому в соответствии с величинами $\left(P_k^t - c_k^t > 0\right)$ их можно упорядочить по степени предпочтения выделения финансовых средств на их закупку, начиная с самых прибыльных, когда приобретается максимально возможное количество нефтепродукта $\tilde{x}_k^t = A_k^t$, и кончая наименее прибыльными, для них $\tilde{x}_k^t = a_k^t$, т.е. приобретаются минимально необходимые объемы. Среди всех нефтепродуктов, скорее всего, окажется один, для которого выполняется соотношение $a_k^t < \tilde{x}_k^t < A_k^t$.

Найденные значения оптимального плана $\left\{\tilde{x}_k^t\right\}$ задачи служат в качестве ограничивающих величин B_k^t, $t = 1,2,3$, в предыдущей задаче их формируется четыре ($k = 1,2,3,4$). В каждой из этих задач формируется оптимальная стратегия динамического управления запасами.

3. Задача оптимального распределения денежных ресурсов между предприятиями.

При формировании финансовых планов предприятия в целом ключевой проблемой является распределение денежных ресурсов на приобретение нефтепродуктов по отдельным предприятиям. Основную долю этих денежных средств составляют:

а) оборотные средства;

б) кредит;

в) предоплата за поставку нефтепродуктов.

Для построения экономико-математической модели задачи введем следующие обозначения. Пусть:

P_{jk}^t - цена реализации k-го нефтепродукта на j-м предприятии в t-м месяце;

c_{jk}^t - суммарная стоимость покупки, хранения и реализации 1 т k-го нефтепродукта на j-м предприятии в t-м месяце;

g_j^t - количество денежных средств, выделяемых j-му предприятию в t-м месяце;

G^t - общий объем денежных средств на приобретение, хранение и реализацию всех нефтепродуктов на всех предприятиях в t-м месяце;

H_j^t - планируемая рентабельность j-го предприятия в t-м месяце;

R_{jk}^t - спрос в t-м месяце на k-й нефтепродукт на j-м предприятии;

x_{jk}^t - объем закупок k-го нефтепродукта на j-м предприятии в t-м месяце;

y_{jk}^t - объем реализации k-го нефтепродукта j-м предприятием в t-м месяце.

Выведем несколько соотношений. В силу того что $y_{jk}^t \ge R_{jk}^t$, для всех $j = 1, ..., 11$ и всех $k = 1, ..., 4$ имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^{4} P_{jk}^t y_k^t \ge \sum_{k=1}^{4} P_{jk}^t R_{jk}^t \,. \qquad (34)$$

Поскольку рентабельность каждого предприятия должна быть не ниже плановой, должно выполняться соотношение

$$\frac{\sum_{jk}^{4} \left(P_{jk}^t y_{jk}^t - c_{jk}^t x_{jk}^t\right)}{\sum_{k=1}^{4} P_{jk}^t y_{jk}^t} \ge H_j^t, j \in 1{,}11. \qquad (35)$$

Как было выяснено раньше, оптимальной стратегией формирования финансовых планов данного предприятия является полное использование имеющихся денежных ресурсов, поэтому выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{4} c_{jk}^t x_{jk}^t = g_j^t, j \in 1{,}11. \qquad (36)$$

Подставив данное равенство в предыдущее соотношение и проделав арифметические преобразования, получим следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^{4} P_{jk}^{t} y_{jk}^{t} \geq \frac{g_j^t}{(1-H_j^t)}. \qquad (37)$$

Из соотношения следует, что величина $g_j^t/(1-H_j^t)$ является нижней границей суммарной величины стоимости всей реализованной продукции j-го предприятия в t-м месяце.

В силу того что соотношение (37) должно выполняться для всех допустимых значений вектора $\{y_{jk}^t\}$, оно будет справедливым при $y_{jk}^t = R_{jk}^t$, поэтому выполняется неравенство

$$g_j^t \leq (1-H_j^t) \cdot \sum_{k=1}^{4} P_{jk}^t R_j^t, j \in 1{,}11. \qquad (38)$$

В даном случае экономико-математическая модель задачи имеет следующий вид. Найти

$$\max \sum_{j=1}^{11} \frac{g_j^t}{(1-H_j^t)} \qquad (39)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{11} g_j^t = G^t, \qquad (40)$$

$$0 \leq g_j^t \leq \hat{q}_j^t, j \in 1{,}11, \qquad (41)$$

где $\hat{q}_j^t = (1-H_j^t) \cdot \sum_{k=1}^{4} P_{jk}^t R_j^t$.

Здесь функция цели обеспечивает максимизацию величины реализованной продукции предприятием в целом, так как является ее нижней допустимой границей, и оптимальный план задачи $\{\tilde{g}_j^t\}$ дает распределение выделяемых денежных средств по предприятиям. Решение этой задачи не представляет особых трудностей.

4. Задача оптимального прикрепления предприятий к поставщикам.

После того как определены потребности каждого предприятия во всех видах нефтепродуктов на каждый календарный месяц периода планирования, возникает проблема определения поставщиков нефтепродуктов. В силу того что все виды нефтепродуктов могут поставляться в отдельности в любом месяце, задача единственным образом расчленяется на ряд подзадач для каждого вида нефтепродукта и каждого месяца в отдельности. Зафиксировав вид нефтепродукта к $(k \in K)$, месяц поставок t, $t \in T$, введем следующие обозначения:

B_{jk}^t - потребности j-го предприятия в k-м виде нефтепродукта в t-м месяце;

A_{jk}^t - максимально возможные объемы поставок k-го нефтепродукта с i-го завода-изготовителя в t-м месяце;

c_{ijk}^t - удельная себестоимость покупки и доставки k-го нефтепродукта от i-го поставщика j-му предприятию в t-м месяце;

x_{ijk}^t - объемы поставок k-го нефтепродукта i-м поставщиком j-му предприятию в t-м месяце.

Для выполнения поставленной задачи необходимо решить следующую задачу транспортного типа. Найти

$$\min \sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^{2} c_{ijk}^t x_{ijk}^t \qquad (42)$$

при следующих условиях

$$\sum_{j=1}^{11} x_{ijk}^t \leq A_i^t, i \in 1{,}2, \qquad (43)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ijk}^t = B_{jk}^t, j \in 1{,}11, \qquad (44)$$

$$x_{ijk}^t \geq 0, (i), (j). \qquad (45)$$

Здесь функция цели обеспечивает минимизацию затрат на закупку и транспортировку k-го нефтепродукта от заводов-поставщиков до конечного предприятия. Первая система ограничений учитывает производственные возможности предприятий изготовителей. Вторая группа ограничений обеспечивает полное удовлетворение потребности предприятия в k-м нефтепродукте.

В силу того что рассматриваются только два завода-поставщика, а $\sum_{i=1}^{2} A_i^t$, как правило, намного больше, чем $\sum_{j=1}^{11} B_j^t$, данная задача решается сравнительно просто.

На основе изложенного можно сформировать следующий алгоритм приближенного решения задачи оптимального планирования экономической деятельности компании.

На первом этапе решаются три задачи оптимального распределения финансовых ресурсов между одиннадцатью перерабатывающими предприятиями для каждого из трех месяцев периода планирования.

На втором этапе с использованием векторов $\{\tilde{g}_{tj}\}$ для каждого предприятия решаются задачи оптимального распределения финансовых ресурсов на приобретение и реализацию отдельных нефтепродуктов. В результате решения задач этого этапа определяются оптимальные (в рамках сформированных задач) объемы закупки каждого вида нефтепродуктов в каждом месяце.

На третьем этапе с использованием результатов расчетов первых двух этапов для каждого предприятия и для каждого вида нефтепродукта решаются задачи выбора оптимальной стратегии закупки и реализации конкретного нефтепродукта в течение периода планирования.

На четвертом этапе решается задача оптимального прикрепления предприятий к поставщикам по каждому нефтепродукту в отдельности.

Несомненным достоинством данного алгоритма является возможность коррекции принимаемых решений ЛПР.

---

[1] *Суменков М.С.* Имитационная модель принятия решений и оценки экономической деятельности предприятия // Экономические науки. 2012. № 2. С. 90-95.

[2] См. : *Доугорти К.* Введение в эконометрику. М., 1997; *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М., 1986, 386 с.

[3] *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применение и обобщения. М., 1996.

[4] *Вайну Я.Я.* Корреляция рядов динамики. М., 1997.

Поступила в редакцию 06.08.2013 г.