Динамическое планирование объемов производства в период освоения новой продукции

© 2013 Павлов Олег Валерьевич, Рясная Татьяна Николаевна
Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)
E-mail: pavlov@ssau.ru, riasnaiatatiana@yandex.ru

Сформулирована и решена динамическая задача планирования объемов производственных заданий на этапе освоения новой продукции. Проблема рассматривается как задача оптимального управления дискретной системой. Получено численное решение с помощью метода динамического программирования Беллмана. Проведено исследование влияния параметров кривой освоения на оптимальные объемы производства.

Ключевые слова: освоение новой продукции, кривая освоения, оптимальные объемы производства, динамическое программирование Беллмана, влияние параметров кривой освоения.

Введение

Этап освоения новой продукции характеризуется динамическим характером экономических показателей производства. На этом этапе совершенствуется технологический процесс, происходит процесс обучения рабочих и менеджеров. Нормы расхода материальных и трудовых ресурсов, потери от брака снижаются, скорость и качество труда рабочих, специалистов и менеджеров возрастают[1]. В результате по мере нарастания объема выпуска продукции происходит снижение удельных затрат: трудоемкости, материалоемкости и себестоимости.

Динамическое снижение удельных затрат на этапе освоения продукции делает актуальной задачу динамического планирования производства промышленного предприятия. Задача заключается в поиске оптимального распределения объемов производства по временным периодам при заданном времени и заданном суммарном объеме производства с целью минимизации затрат за весь период освоения нового изделия[2]. Под суммарным (кумулятивным) объемом производства понимается количество изделий, изготовленных с начала освоения новой продукции.

1. Постановка динамической задачи планирования объемов производства на этапе освоения новой продукции

Динамика изменения суммарного объема производства промышленного предприятия на этапе освоения новой продукции описывается дискретным уравнением:

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = \overline{1,n},$$

где x_t - суммарный объем производства за t временной период;

t - номер временного периода;

u_t - объем производства в периоде t;

n - число периодов на этапе освоения изделия.

В начале этапа освоения известно количество произведенной продукции:

$$x_0 = X_0 .$$

В конечный период суммарный объем произведенной продукции должен быть равен заданному:

$$x_n = X_0 + R .$$

Объем производства в каждом периоде t неотрицателен и не может превышать максимальной производственной мощности оборудования:

$$0 \le u_t \le Q^{max}, \quad t = \overline{1,n} ,$$

где Q^{max} - максимальная производственная мощность оборудования.

Затраты в периоде t определяются как произведение удельных затрат τ_t и объема производства u_t:

$$C_t = \tau_t u_t . \qquad (1)$$

Динамика изменения удельных затрат (трудоемкости, материалоемкости и себестоимости) продукции от суммарного (кумулятивного) объема производства описывается степенной зависимостью[3]:

$$\tau_t = a x_t^{-b} . \qquad (2)$$

где a - затраты на производство первого изделия;

b - коэффициент крутизны кривой освоения.

Коэффициент крутизны кривой освоения характеризует скорость снижения удельных затрат продукции или скорость освоения. Кривая, построенная на основе формулы (2), называется кривой освоения.

Подставляя выражение (2) в (1), получим формулу для затрат в периоде t:

$$C_t = a x_t^{-b} u_t \ .$$

В качестве критерия принятия управленческого решения берется минимизация суммарных затрат за все время освоения нового изделия:

$$J = \sum_{t=1}^{n} a x_t^{-b} u_t \to min \ .$$

Таким образом, модель принятия решений для руководства предприятия запишется в виде

$$\begin{cases} J = \sum_{t=1}^{n} a x_t^{-b} u_t \to min, & (3) \\ 0 \le u_t \le Q^{max}, \ t = 1, n, & (4) \\ x_t = x_{t-1} + u_t, \ t = 1, n, & (5) \\ x_0 = X_0, & (6) \\ x_n = R. & (7) \end{cases}$$

Сформулированная задача (3)-(7) является задачей оптимального управления дискретной системой. Решением сформулированной задачи является такое оптимальное управление u_t, удовлетворяющее ограничением (4), которое переводит дискретную систему (5) из начального состояния (6) в конечное состояние (7) и обеспечивает минимум критерия оптимальности (3).

2. Решение динамической задачи планирования объемов производства на этапе освоения новой продукции

Разработанная математическая модель (3)-(7) конкретизирована на примере освоения нового изделия “Кассета” на предприятии ОАО “Салют”. Динамика изменения трудоемкости изделия “Кассета” от объемов производственных заданий нарастающим итогом приведена на рис. 1.

Для того чтобы построить эконометрическую модель по данным, приведенным на рис. 1 с помощью метода наименьших квадратов[4], необходимо произвести линеаризацию степенной функции (2):

$$ln(\tau_t) = ln(a) - b\,ln(x_t) \ . \qquad (8)$$

Произведем замены в формуле (8):

$$Y = ln(\tau_t), \ A = ln(a), \ B = -b, \quad X = ln(x_t) \ . \qquad (9)$$

В итоге получается модель, в которой результативный признак Y (натуральный логарифм трудоемкости изделия) связан с факторным признаком X (натуральным логарифмом суммарного объема производства изделия) линейной зависимостью:

$$Y = A + BX + \varepsilon \ ,$$

где ε - случайная компонента.

С помощью метода наименьших квадратов для изделия “Кассета” получены следующие значения коэффициентов: $\hat{A} \approx 3{,}75$ и $\hat{B} \approx -0{,}29$. Эм-

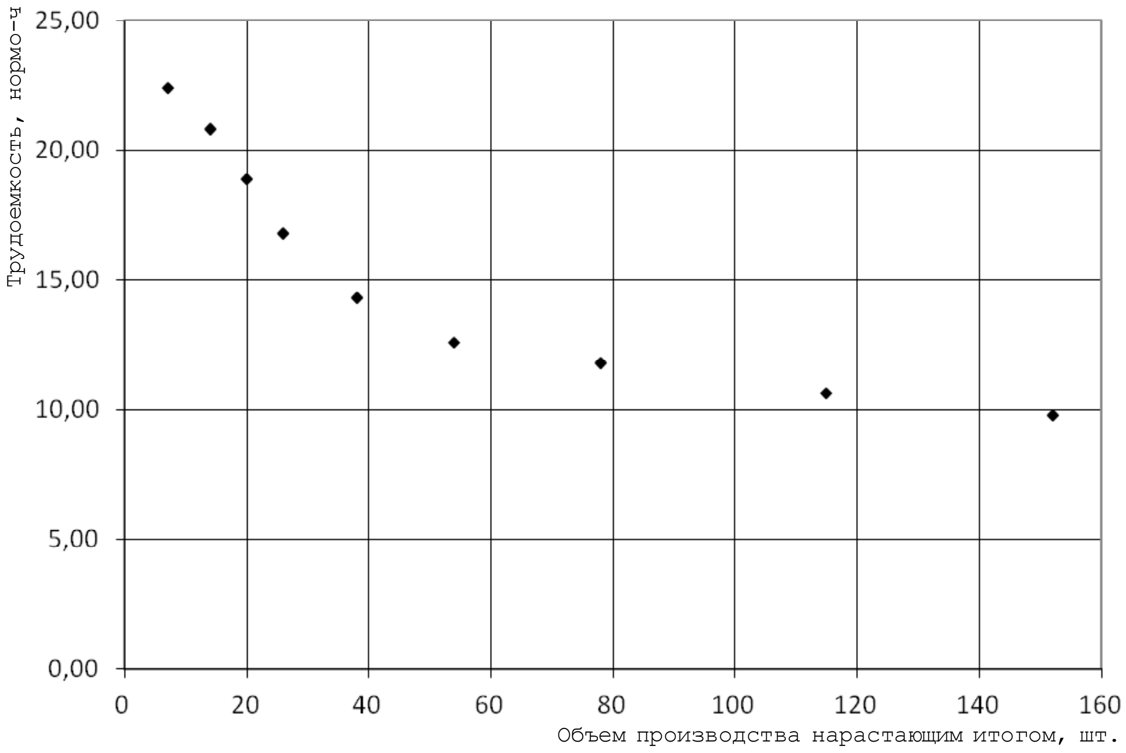

Рис. 1. **Динамика изменения трудоемкости изделия “Кассета” от суммарного объема производства**

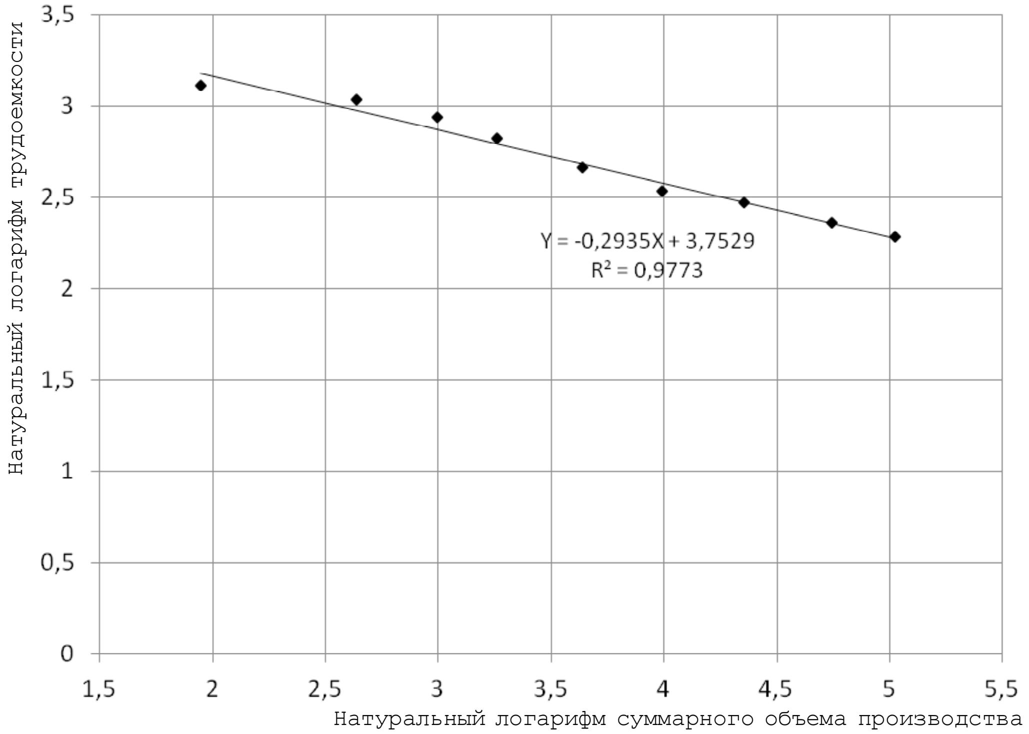

***Рис. 2.* Эмпирические и расчетные значения натурального логарифма трудоемкости изделия "Кассета"**

пирические и расчетные значения натурального логарифма трудоемкости изделия "Кассета" представлены на рис. 2.

Для оценки качества полученной зависимости рассчитывается коэффициент детерминации R^2:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \approx 0{,}98 .$$

С помощью коэффициента детерминации R^2 проверим значимость построенной модели. Для этого выдвинем основную и конкурирующую гипотезы:

$$\begin{cases} H_0 : R^2 = 0 \\ H_0 : R^2 \neq 0 \end{cases}.$$

Если основная гипотеза верна, то статистика

$$F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}$$

имеет распределение Фишера с $k_1=m$ и $k_2=n-m-1$ числами степеней свободы, где m - число переменных в регрессионной модели, а n - объем выборки.

Основная гипотеза проверяется с помощью табличного значения F-критерия Фишера. Если наблюдаемое значение больше табличного, то основная гипотеза отвергается при заданном уровне значимости α, принимается конкурирующая гипотеза и, следовательно, построенная регрессионная модель значима[5]. В противном случае принимается основная гипотеза и построенная регрессионная модель незначима.

При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ получены следующие значения F-критерия Фишера:

$$F_{набл} = \frac{0{,}85 \cdot (19-2)}{1-0{,}85} \approx 301{,}2 ,$$

$$F_{кр}(0{,}01; 1; 7) \approx 12{,}25 .$$

Так как наблюдаемое значение критерия Фишера больше табличного $F_{набл} > F_{кр}$, основная гипотеза о незначимости полученной регрессионной модели отвергается, построенная регрессионная модель значима.

С учетом (9) находятся параметры эконометрической модели (2) для трудоемкости изделия "Кассета" $a \approx e^{3,75} \approx 42{,}64$, $b \approx 0{,}29$. Таким образом, динамика изменения трудоемкости изделия "Кассета" от суммарного объема производства описывается следующей эконометрической моделью:

$$\tau_t = 42{,}64 x_t^{-0{,}29} . \qquad (10)$$

С учетом (10) математическая модель динамического планирования объемов производства изделия "Кассета" запишется в виде

$$\begin{cases} J = \sum_{t=1}^{n} 42{,}64 x_t^{-0{,}29} u_t \to min, \\ 0 \le u_t \le Q^{max}, \ t = \overline{1,n}, \\ x_t = x_{t-1} + u_t, \ t = \overline{1,n}, \\ x_0 = 0, \\ x_n = R. \end{cases}$$

Для решения сформулированной задачи применяется метод динамического программирования Беллмана[6]. С использованием данного метода поставленная задача решена для следующих данных: суммарный объем производства изделия “Кассета” за год $R = 240$ комплектов, количество временных периодов $n = 12$, $x_0 = 1$, максимальная производственная мощность $Q^{max} = 40$

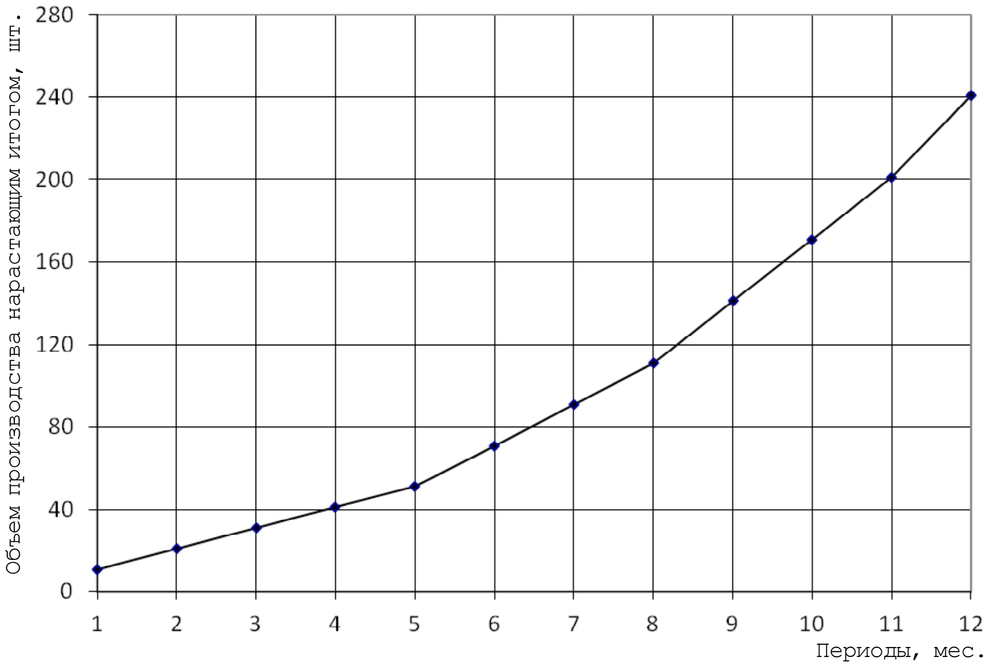

Рис. 3. **Оптимальная траектория суммарного объема производства изделия “Кассета”**

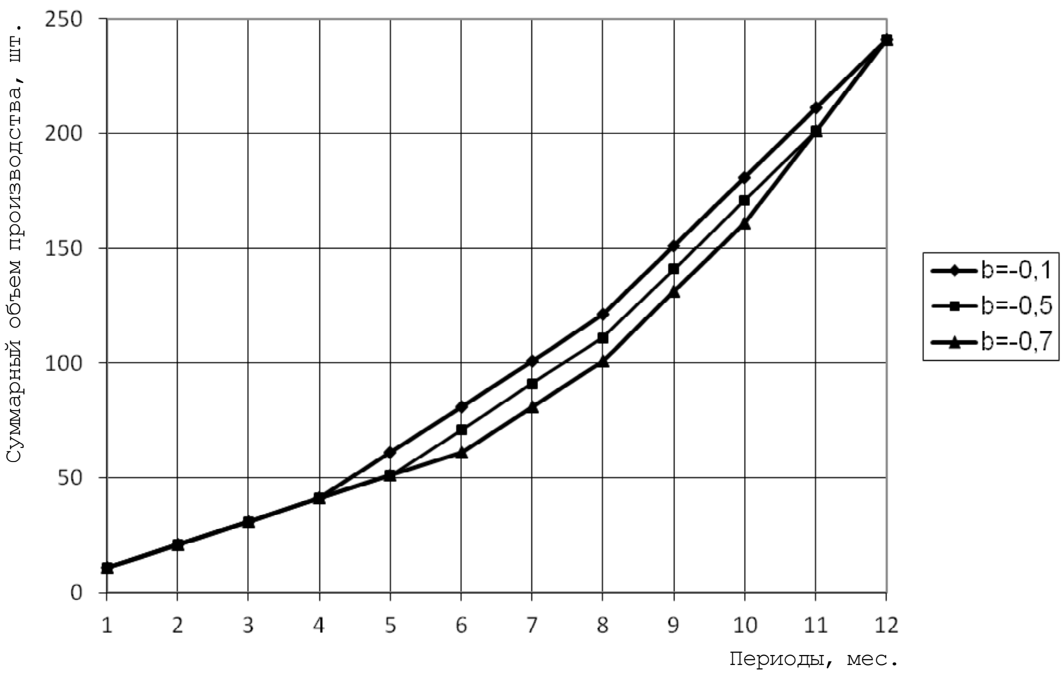

Рис. 4. **Зависимость оптимальных траекторий суммарного объема производства от скорости освоения продукции**

комплектов, объем производства в каждый период должен быть кратен 10. Оптимальная траектория суммарного объема производства изделия "Кассета" приведена на рис. 3. Из анализа рисунка видно, что оптимальной стратегией является постепенное увеличение объемов производства во временных периодах до максимально возможного по мере снижения трудоемкости изделия.

На рис. 4 представлена зависимость оптимальных траекторий суммарного объема производства от скорости освоения изделия *b*. Из анализа рисунка можно сделать вывод, что с увеличением скорости освоения изделия оптимальная траектория суммарного объема производства становится более "выпуклой".

В работе также было проведено исследование влияния затрат на производство первого изделия *a* на оптимальную траекторию суммарного объема производства, которое показало, что затраты на производство первого изделия не влияют на оптимальную траекторию суммарного объема производства.

Заключение

В настоящей работе представлена математическая модель принятия оптимального решения по определению объемов производства на этапе освоения нового изделия, характеризующегося динамическим снижением удельных затрат. Проблема формулируется как задача оптимального управления дискретной системой. Задача заключается в поиске оптимального распределения объемов производства по временным периодам при заданном времени и заданном суммарном объеме производства с целью минимизации затрат за весь период освоения нового изделия.

На примере предприятия ОАО "Салют" построена эконометрическая модель трудоемкости нового изделия "Кассета". С помощью динамического программирования Беллмана найдено оптимальное распределение объемов производства изделия "Кассета" по временным периодам.

В результате решения задачи сделан следующий вывод: оптимальной стратегией является постепенное увеличение объемов производства во временных периодах до максимально возможного по мере снижения трудоемкости изделия.

Проведено исследование влияния параметров кривой освоения на оптимальные объемы производства. Установлено, что с увеличением скорости освоения изделия оптимальная траектория суммарного объема производства становится более "выпуклой". Также выявлено, что затраты на производство первого изделия не влияют на оптимальную траекторию суммарного объема производства.

---

[1] См.: *Новиков Д.А.* Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. 1997. № 19. С. 5-22; Организация производства и управление предприятием / под ред. О.Г. Туровца. М., 2004; *Новицкий Н.И.* Организация производства на предприятиях. М., 2001; *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* Микроэкономика. М., 2001.

[2] См.: *Павлов О.В.* Динамическая задача оптимального распределения объемов работ по периодам проекта // Экономические науки. 2011. № 4 (77). С. 274-279; *Павлов О.В., Рясная Т.Н.* Решение динамической задачи планирования производства в период освоения новой продукции // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011. № 3 (23). С. 114-121.

[3] См.: Организация производства и управление предприятием; *Новицкий Н.И.* Указ. соч.

[4] Эконометрика / В.С. Мхитарян [и др.]. М., 2010.

[5] *Айвазян С.А., Иванова С.С.* Эконометрика. М., 2010.

[6] См.: *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., 1960; *Калихман И.Л., Войтенко М.А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. М., 1979.

Поступила в редакцию 06.03.2013 г.