Особенности методов стохастической оптимизации в социально-экономических системах

© 2013 Бородин Александр Иванович
доктор экономических наук, профессор
Национальный исследовательский университет - Высшая школа экономики, г. Москва
© 2013 Сорочайкин Андрей Никонович
кандидат экономических наук, доктор философских наук
Самарский государственный университет
E-mail: aib-2004@yandex.ru, san_27@inbox.ru

Рассмотрены методы стохастической оптимизации в социально-экономических системах. Авторами предложена стохастическая модель оптимального выпуска продукции. Разработаны практические рекомендации относительно оптимизации в производственных системах.

Ключевые слова: методы стохастической оптимизации, социально-экономические системы, математическая модель, линейное программирование, математическое ожидание.

Очевидно, что не для всякой социально-экономической системы можно обойтись только детерминированными характеристиками. На практике часто встречаются оптимизационные проблемы, исходные параметры которых являются случайными. Например, при планировании деятельности сельскохозяйственного предприятия следует учитывать, что урожайность и другие показатели зависят от погодных условий, предсказать которые однозначно не представляется возможным. К случайным величинам можно отнести интенсивность заказов на предприятиях сферы обслуживания, количество покупателей в магазинах, число пассажиров и т.п. Поэтому если невозможно достоверно задать значения параметров (нормативы расходов ресурсов, запасы сырья, стоимость и др.) в прикладной задаче, то ее относят к стохастической. Методы решения задач со случайными факторами называют методами стохастической оптимизации.

Авторы будут опираться в своих исследованиях на достаточно подробный анализ последних достижений и публикаций, который проведен в[1]. Данный источник содержит общие постановки задач стохастической оптимизации, которые могут служить началом научных разработок.

Общей проблемой здесь является отсутствие конкретных практических рекомендаций, какие типы вероятностных распределений использовать в том или ином случае. Часто не дается достаточное экономическое обоснование предлагаемым подходам и математика в них используется формально.

Целью статьи является разработка модели оптимального выпуска продукции в стохастической постановке. Планируется предложить методы реализации этой задачи, проанализировав модель на чувствительность к изменениям параметров производственной системы.

В математических методах исследования операций принято выделять такое направление, как стохастическое программирование. Уделим внимание методам и моделям данной направленности.

Наличие статистической информации позволяет оценить выборочные характеристики социально-экономических систем: эмпирическую функцию распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и другие параметры. Естественно, что такие задачи решаются в условиях неопределенности и риска. Их принято делить[2] на одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные.

К одноэтапным задачам стохастической оптимизации относятся те, в которых решение принимается один раз и в дальнейшем уже не меняется. На практике такой подход часто применяется при оптимальном размещении производственных мощностей.

В двухэтапных задачах первоначальное решение может быть откорректировано на втором этапе управления социально-экономической системой. Например, предприятие не располагает однозначной информацией о спросе на свою новую продукцию[3]. Поэтому на первом этапе выпускается пробная партия продукции, позволяющая оценить спрос. Завершающий (второй) этап на основе информации с первого этапа формирует откорректированный оптимальный план выпуска.

Задача оптимального выпуска продукции в стохастической постановке

Ресурсы	Расход ресурсов на единицу продукции				Запасы ресурсов
	P_1	P_2	…	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Цена единицы продукции	$c_1(\omega)$	$c_2(\omega)$	…	$c_n(\omega)$	
Количество выпуска продукции	X_1	X_2	…	X_n	

Многоэтапные проблемы допускают любое количество корректирующих действий. К ним относятся задачи управления запасами в последовательные промежутки времени, оптимизации инвестиционных проектов, оперативного управления производственными, технологическими и другими процессами[4].

Задачи стохастической оптимизации разнообразны во многих аспектах. Например, если нарушение некоторых ограничений ведет к тяжелым последствиям, то перед нами задача в так называемой жесткой постановке. Ограничения могут носить вероятностный характер. Исследователя в стохастическом программировании поджидают многочисленные трудности в трактовках вероятностных характеристик, в выборе критерия эффективности и т.п.

В детерминированном случае из множества допустимых решений, которые удовлетворяют всем ограничениям задачи, исследователь вычленяет оптимальное решение. При стохастической оптимизации бывает, что в качестве допустимого решения признают и такие, которые могут в незначительной мере не удовлетворять некоторым из ограничений. Такая постановка усложняет проблему, и поэтому вводят систему штрафов за нарушение ограничений.

Стохастические модели могут содержать случайные коэффициенты в целевой функции и случайные составляющие в системе ограничений задачи. Рассмотрим наиболее распространенные постановки задач стохастического программирования.

Предположим, что коэффициенты целевой функции C_j ($j = 1, n$) являются случайными величинами, т.е. $C_j(\omega)$. Остальные параметры модели считаются детерминированными.

Обсудим, будет ли такой подход обоснованным. Для этого рассмотрим классическую задачу оптимального выпуска продукции.

Пусть предприятие начинает выпуск n новых наименований изделий $P_1, P_2,..., P_n$. Для выпуска этих изделий используют m ресурсов S_1, $S_2,..., S_m$, под которыми будем подразумевать сырье, материалы, комплектующие изделия и т.п. На складе созданы запасы ресурсов b_i ($i = 1, m$). На выпуск одного изделия P_j расходуется a_{ij} единиц ресурса S_i. Все перечисленные параметры детерминированные.

Так как изделия впервые поступают потребителям, их рыночная цена предполагается случайной. Обозначим эти цены через $C_j(\omega)$ ($j = 1, n$). Данные такой задачи линейного программирования поместим в таблицу.

Пусть $Z(\omega)$ (ден. ед.) - доход от реализации продукции. Стохастическую постановку задачи можно свести к детерминированному случаю, если взять от целевой функции математическое ожидание.

Математическая модель задачи линейного программирования, составленная по таблице, будет выглядеть следующим образом:

$$\mathrm{M}\,[\mathrm{Z}(\omega)] = \sum_{j=1}^{n} M\,[C_j(\omega)]\; X_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_j \quad (i = 1, m),$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, n).$$

Адекватность модели будет в значительной мере зависеть от выбора типа распределения вероятностей случайных величин $C_j(\omega)$ ($j = 1, n$). Так как речь идет о ценах на продукцию, это непрерывные случайные величины, принимающие свои значения из соответствующих интервалов.

Авторы предлагают использовать случайные величины, равномерно распределенные на отрезке [α; β]. По смыслу задачи концы отрезка могут быть только положительными числами.

Для того чтобы задать такие случайные величины, необходимо определить отрезки распределения. Это можно сделать статистическими методами. Выпустив пробную партию изделий P_j, определим по выборке наименьшую α_j и наибольшую β_j цены. Поступив аналогично с остальными наименованиями товаров, получим, что случайные величины $C_j(\omega)$распределены равномерно на отрезках $[\alpha_j; \beta_j]$ $(j = 1, n)$.

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины $C_j(\omega)$ вычисляется как$[\alpha_j; \beta_j]$. Обозначив $Z \overset{def}{=} M\,[Z(\omega)]$, придем к целевой функции такого вида:

$$Z' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} x_j \to max.$$

Такой подход позволяет применить методы линейной оптимизации в детерминированном виде. Наряду с исходной задачей

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, n),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max. \end{cases},$$

рассмотрим двойственную задачу

$$y_i \geq 0 \quad (j = 1, n),$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}xy_2 + \cdots + y_{m1}x_m \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \to min.$$

Согласно первой теореме двойственности, если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций совпадают:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Если же целевая функция одной из задач не ограничена, то область допустимых решений другой задачи пустая.

Построение двойственной задачи позволяет провести экономико-математический анализ исходной задачи линейной оптимизации.

Рассмотрим исходную задачу оптимального выпуска продукции в матрично-векторной форме:

$$Z = \vec{C} * \vec{X} \to max,$$
$$\vec{AX} \leq \vec{B}$$
$$\vec{X} \geq 0,$$

где A - матрица из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений;

$\vec{B}$ - вектор запасов ресурсов;

$\vec{C}$ - вектор цен продукции;

$\vec{X}$ - искомый план производства продукции, который будет максимизировать доход от реализации Z.

Пусть $\vec{Y} = (y_1, y_2,..., y_m)$ - решение двойственной задачи, которое должно минимизировать расходы на приобретение ресурсов F. Введем транспонированную матрицу A^T и запишем в матрично-векторной форме двойственную задачу:

$$F = \vec{B} * \vec{Y} \to min,$$
$$A^T\vec{Y} \geq \vec{C},$$
$$\vec{Y} \geq 0.$$

По второй теореме двойственности, если какая-то переменная x_j^* $(j = 1, n)$ оптимального решения исходной задачи положительна, то j-е ограничение двойственной задачи ее оптимальным решением обращается в строгое равенство. Если оптимальное решение исходной задачи обращает какое-то i-е $(i = 1, m)$ ограничение в строгое равенство, то в оптимальном решении двойственной задачи переменная y_i^* больше нуля.

Таким образом, двойственные оценки являются показателем дефицитности ресурсов и продукции. Величину y_i^* называют двойственной оценкой или теневой ценой i-го ресурса. Если $y_i^*> 0$, то ресурс дефицитный и при реализации оптимального плана $\vec{X}^*$ расходуется полностью. То есть i-е ограничение исходной задачи обратится в строгое равенство. Приобретение дополнительной единицы этого ресурса приведет к увеличению дохода от реализации Z на величину y_i^*. Чем больше значение теневой цены, тем дефицитнее ресурс. Для недефицитного ресурса $y_i^*=0$.

Дальнейший анализ решения задач линейной оптимизации будет основан на исследовании чувствительности оптимального плана к изменениям в значениях параметров C_j, a_{ij}, b_i $(i = 1,m; j = 1, n)$. Поэтому такой анализ кратко называют анализом чувствительности.

Пусть исходный вектор запасов ресурсов имеет вид $\vec{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Введем в рассмотрение приращения Δb_i и результат таких приращений $b_i + \Delta b_i$ $(i = 1, m)$. Обозначив через $\Delta\vec{B} = (\Delta b_1, \Delta b_2, \ldots, \Delta b_m)$ вектор приращений, получим новый вектор запасов ресурсов $\vec{B} + \Delta\vec{B}$. Теперь подставим в исходную и двойственную задачу вместо $\vec{B}$ вектор $\vec{B} + \Delta\vec{B}$. Таким образом, будет образована симметричная пара двойственных многопараметрических задач.

В данной статье уже упоминалась первая теорема двойственности. Ее основное утверждение $Z_{max} = F_{min}$ или в другом виде $\vec{C} \cdot \vec{X}^* = B \cdot \overline{Y*}$, где Y является вектором неизвестных двойственной задачи. Обозначим через $\vec{X}^*_\Delta$ вектор оптимального решения многопараметрической задачи. В силу двойственности получим, что $\vec{C} \cdot \vec{X}^*_\Delta = (\vec{B} + AB) \cdot Y^*$.

Рассмотрим приращение целевой функции исходной задачи:

$$\Delta\vec{Z}\max = \vec{C} \cdot \vec{X}^*_\Delta - \vec{C} \cdot \vec{X}^* =$$

$$= (\vec{B} + AB) \cdot Y^* - B \cdot \overline{Y*} = \Delta\vec{B} \cdot \overline{Y*}.$$

Если изменить только i-е ограничение, то $(\Delta\vec{Z}\max)i = \Delta b_i y^*_i$. Откуда получим:

$$y^*_i = \frac{(\Delta \mathrm{Zmax})i}{\Delta b_i} \quad (i = 1, m).$$

После предельного перехода имеем:

$$y^*_i = \frac{\partial \max}{\partial b_i} \quad (i = 1, m).$$

Следовательно, двойственные оценки являются показателем влияния ограничений на значение целевой функции. Поэтому представляет практический интерес вычислить предельные значения правых частей системы ограничений b_i (нижней и верхней границ запасов ресурсов), при которых оптимальный план $\vec{X}^*$ останется неизменным.

Зафиксируем базисные неизвестные, вошедшие в оптимальный план. Пусть данные имеют числовые значения $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_m$. Базисным неизвестным соответствуют m векторов-столбцов коэффициентов в матрице, которая получена из матрицы A добавлением балансовых столбцов при формировании канонического вида задачи линейного программирования. Составим из этих векторов-столбцов матрицу

$$W = \begin{cases} w_{11} + w_{12} + \cdots + w_{1m} \\ w_{21} + w_{22} + \cdots + w_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{m1} + w_{m2} + \cdots + w_{mm}. \end{cases}$$

И рассчитаем ей обратную матрицу

$$W^{-1} = \begin{cases} d_{11} + d_{12} + \cdots + d_{1m} \\ d_{21} + d_{22} + \cdots + d_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m1} + d_{m2} + \cdots + d_{mm}. \end{cases}$$

Двойственные оценки используют для экономического анализа решения при условии, что запасы ресурсов изменяются лишь в определенных пределах. Интервалы устойчивости ресурсов находят по формулам:

$$[b_i - \Delta b_i^-;\ b_i + \Delta b_i^+]\ (i = 1, m),$$

где нижний предел уменьшения Δb_i^- и верхний предел увеличения Δb_i^+ вычисляют следующим образом:

$$\Delta b_i^- = \min_{dji>0} \frac{x^*_j}{dji},$$

$$\Delta b_i^+ = \min_{dji<0} \frac{x^*_j}{dji}.$$

Заметим, если в i-м столбце матрицы W^{-1} не окажется отрицательных чисел, а будут только положительные и равные нулю, то в качестве Δb_i^+ принимают $+\infty$.

Двойственные оценки являются показателем целесообразности производства новых видов продукции. Допустим, имеется возможность начать выпуск продукции P_{n+1}. Нормы расхода ресурсов на производство одной единицы продукции составляют, соответственно, $a_{1,n+1}; a_{2,n+1}; \ldots, a_{m,n+1}$. Цена единицы продукции c_{n+1}. Целесообразность производства определяется знаком показателя:

$$\Delta_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{m} a_{i,n+1} \cdot y^*_i.$$

Если $\Delta_{n+1} > 0$, то производство прибыльное, $\Delta_{n+1} = 0$ - безубыточное, $\Delta_{n+1} < 0$ - убыточное.

Двойственные оценки также используют как инструмент сопоставления условных затрат и результатов. При изменении количества ресурсов в пределах устойчивости отдельное влияние i-го ресурса на величину дохода от реализации определяется как $(\Delta\,\mathrm{Zmax})i = \Delta b_i y_i^*$. Если $(\Delta\,\mathrm{Zmax})i > 0$, то доход увеличится на $(\Delta\,\mathrm{Zmax})i$ денежных единиц, в противном случае уменьшится. Суммарное влияние изменений количества всех ресурсов вычисляется так:

$$\Delta\,\mathrm{Zmax} = \Delta\vec{B} \bullet \overrightarrow{Y*} = \sum_{i=1}^{m} (\Delta\,\mathrm{Zmax})i.$$

Рассмотрим возможность дополнительной закупки i-го ресурса в объеме Δb_i^+ по цене p_i за единицу ресурса. Затраты на приобретение составят $\Delta b_i^+ \bullet p_i$ Приращение дохода составит $\Delta b_i^+ \bullet y_i^*$. Если приращение дохода превысит затраты на приобретение, т.е.

$$\Delta b_i^+ \bullet y_i^* - \Delta b_i^+ \bullet p_i > 0,$$

то закупка целесообразна. В противном случае - нет.

Интервалом устойчивости цены за единицу i-й продукции называется отрезок $[C_i^{min}; C_i^{max}]$ со следующими свойствами. Если цена $C_i \in [C_i^{min}; C_i^{max}]$, а цены на остальные виды продукции зафиксированы, то оптимальный план выпуска продукции $\vec{X}^*$ останется неизменным.

Чтобы определить интервалы устойчивости, нужно вспомнить геометрическую интерпретацию задач линейного программирования. Опорные планы - это угловые точки, образованные пересечениями гиперплоскостей из системы ограничений. При нахождении экстремального значения целевой функции гиперплоскость-изоцель с вектором нормали $\vec{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ движется к оптимальному плану $\vec{X}^*$ и т.д.

Организация современного и наукоемкого производства требует календарной увязки большого числа взаимосвязанных работ. Составление и анализ календарных планов представляют собой довольно сложную задачу, при решении которой применяются методы сетевого планирования. Эти методы дают возможность определить следующее: во-первых, какие работы или операции из числа многих, составляющих проект, являются критическими по своему влиянию на общую календарную продолжительность проекта; во-вторых, каким образом построить наилучший календарный план проведения всех работ проекта, чтобы выдержать заданные сроки при минимальных затратах.

Под сетевой моделью организации производства будем понимать экономико-математическую модель, отражающую весь комплекс работ и событий, связанных с реализацией проекта[5].

Опишем метод анализа и оценки программ PERT (Program Evaluation and Review Technique). Он был предложен для практических нужд в 1958 г.[6]

Метод анализа и оценки программ отличается от детерминированных методов тем, что для каждой операции рассчитываются ее вероятностные характеристики. Его применяют для контроля сроков выполнения проекта. Метод PERT ориентирован на анализ таких проектов, для которых продолжительность выполнения всех или некоторых работ не удается определить точно. Прежде всего, речь идет о проектировании и внедрении новых производств. В таких проектах многие работы не имеют аналогов. В результате возникает неопределенность в сроках выполнения проекта в целом.

Метод PERT предполагает, что время выполнения каждой работы является случайной величиной. Необходимо определять следующие три оценки: *a* - оптимистическое время (время выполнения работы в наиболее благоприятных условиях); *m* - наиболее вероятное время (время выполнения работы в нормальных условиях); *b* - пессимистическое время (время выполнения работы в неблагоприятных условиях).

Многочисленные исследования[7] показали, что время выполнения работы хорошо описывается бета-распределением вероятностей. Математическое ожидание (среднее) времени выполнения работы может быть оценено по формуле

$$M_t \approx \frac{a + 4_m + b}{6}.$$

Оценка дисперсии равна

$$D_t \approx \frac{b - a}{6},$$

а с учетом того, что $b \geq a$, получим оценку для среднего квадратического отклонения времени выполнения операции:

$$\sigma_t \approx \frac{b - a}{6}.$$

Пусть T - это время выполнения проекта. Если в проекте есть работы, о сроках выполнения которых можно лишь предполагать, то время T является случайной величиной. Математическое ожидание времени выполнения проекта $M\,[T]$ равно сумме ожидаемых значений времени выполнения работ M_t, лежащих на критическом пути. Аналогичное предположение делают и относительно дисперсии $D[T]$.

Для определения критического пути проекта используют метод критического пути. На этом этапе анализа проекта время выполнения работы полагается равным ожидаемому времени, т.е. M_t.

Предполагается, что время выполнения проекта *T* является суммой достаточно большого числа независимых, одинаково распределенных случайных величин *t*. При таких условиях применима центральная предельная теорема теории вероятностей. Значит, случайная величина *T* имеет асимптотически нормальное распределение вероятностей с временными параметрами *M* [*T*] и $\sigma[T] = \sqrt{D[T]}$.

Можно задать конкретный срок выполнения проекта T_0. Тогда вероятность того, что время выполнения проекта *T* не превысит заданный срок T_0, приближенно вычисляют по формуле

$$P\{T \le T_0\} \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{T_0 - M\,[T]}{\sigma[T]}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2}\,dx$.

В данной статье предложен достаточно широкий набор методов, позволяющих проводить оптимизацию в социально-экономических системах.

В качестве проблем практической направленности рассмотрены задачи оптимального выпуска продукции. Для разработки производственных планов авторы предлагают конкретную модель стохастической оптимизации. Этой модели дано подробное экономическое обоснование. Описаны методы решения таких задач.

Предлагается использовать данную модель не обособленно, а в сочетании с методом анализа и оценки программ. Этот метод позволяет проектировать сложные производственные системы в условиях неопределенности.

---

[1] *Бородин А.И.* Моделирование эколого-социально-экономической системы // Известия Томского политехнического университета. 2006. □ 2, т. 309. С. 221-224.

[2] *Бородин А.И.* Подходы к моделированию равновесного распределения в эколого-экономических системах // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия “Естественные и технические науки”. 2004.

[3] *Сорочайкин А.Н.* Методика оценки информационно-знаниевого потенциала предприятия // Вопросы экономики и права. 2012. □ 12 (54). С. 130-135.

[4] См. подробнее: *Сорочайкин А.Н.* Методические особенности экономической диагностики качества и эффективности информационно-знаниевых процессов промышленного предприятия // Основы экономики, управления и права. 2012. □ 5(5). С. 75-78.

[5] *Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б.* Математические методы и модели для менеджмента : учеб. пособие. 3-е изд., стер. СПб., 2007. С. 83-88.

[6] *Иванов С.Н.* Математические методы исследования операций : учеб. пособие. Махачкала, 2003. С. 350.

[7] См.: *Костевич Л.С.* Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений : учеб. пособие. Минск, 2003. С. 216-217.

Поступила в редакцию 04.03.2013 г.