Оценка стоимости опционов на рынке с трансакционными издержками и негауссовой ценовой динамикой

© 2013 Гисин Владимир Борисович
кандидат физико-математических наук, профессор
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва
E-mail: vgisin@yandex.ru

Рассматривается модель ценообразования на рынке с трансакционными издержками, ценовая динамика которого описывается случайным процессом Леви. На основе стохастического доминирования определяются границы справедливой цены опционов.

Ключевые слова: модель ценообразования, рынок с трансакционными издержками, тяжелые хвосты, негауссовы распределения, распределение Мейкснера.

В основе классических моделей ценообразования лежат два предположения: гауссовость распределения логарифмической доходности и независимость приращений. Многочисленные исследования финансовых временных рядов, особенно интенсивно проводившиеся в последнее десятилетие, позволили выделить их особенности (*stylized facts* или *stylized features*), которые в ряде случаев не согласуются с основными предположениями. К числу таких особенностей относятся тяжелые хвосты и асимметрия распределений доходности, долговременная память, кластеризация волатильности, мультифрактальность и др.[1] Применение классических моделей без учета этих особенностей может приводить к недостаточной точности в оценке производных инструментов, занижению вероятности экстремальных явлений, избыточным затратам при хеджировании рисков.

Модели рынка, построенные при ослаблении базовых предположений, активно изучаются современной финансовой математикой. Особый интерес вызывают два класса моделей: модели Леви и фрактальные модели. В моделях Леви удается учесть асимметрию и тяжелые хвосты распределений доходности, во фрактальных моделях - эффекты долговременной памяти (например, персистентность и антиперсистентность финансовых временных рядов). Переход к подобным моделям сопряжен со значительными математическими сложностями. В обоих случаях перестает быть справедливой “основная теорема безарбитражного ценообразования” (FTAP). В моделях Леви, как правило, существует более или менее объемное семейство мартингальных мер и, значит, для справедливых цен производных инструментов могут быть указаны не точечные значения, а интервалы. Вычисление цен производных инструментов в моделях Леви представляет собой трудную математическую и вычислительную задачу[2]. В моделях фрактального рынка без трения мартингальная мера не существует и безарбитражный подход для определения справедливых цен невозможен в принципе[3].

Возникающие сложности показывают, что в “неклассических” моделях необходим учет факторов, от которых можно абстрагироваться в моделях классических. В частности, перспективным представляется подход с учетом трансакционных издержек. Так, число публикаций по финансовой математике, посвященных изучению моделей с трансакционными издержками и зарегистрированных в Mathscinet, выросло с 9 в 80-х гг. (1980-1989) до 52 в 90-х (1990-1999) и до 278 в нулевых (2000-2009)[4].

В соответствии с классическими моделями рынка без трения инвестор, портфель которого составлен из одного безрискового актива и одного рискового актива, “непрерывной” торговлей поддерживает оптимальное соотношение активов в портфеле. Соотношение должно оставаться неизменным, если остаются неизменными неприятие риска и инвестиционные возможности инвестора. Наличие трансакционных издержек радикально меняет положение дел. «Даже малые транзакционные издержки оказывают заметное влияние на рациональное поведение: инвестор переходит от непрерывной торговли к стратегии “купить и держать”»[5].

Наличие трансакционных издержек расширяет множество стратегий, не допускающих арбитража. Следствием этого является появление системы “справедливых” цен[6]. Характерным для рынков с трансакционными издержками является то, что справедливая цена производного инструмента определена неоднозначно. Имеется ценовой коридор, выход за который приводит к появлению арбитражных возможностей. В случае, когда ценовая динамика описывается гауссовским случайным процессом с независимыми приращениями, а функция полезности инвестора вогнута, оценка границ этого коридора может быть произведена на основе стохастического доминирования[7]. Методы, развитые в упомянутой и других работах Константинидеса, тем более актуальны, что некоторые распространенные подходы (например, поправка Леланда) не имеют достаточного обоснования[8]. Метод Константинидеса с учетом его общности допускает перенос на более общие модели, чем те, для которых он первоначально был разработан. Так, с его использованием удается оценить границы справедливых цен на фрактальном рынке с трансакционными издержками[9]. В настоящей работе метод Константинидеса применяется для определения ценовых границ на рынке, динамика которого описывается процессом Мейкснера.

Как уже отмечалось, для распределений доходности, построенных по статистическим данным, характерны тяжелые хвосты и асимметрия. Коэффициент асимметрии ряда ведущих индексов (S&P 500, Nasdaq-Composite, DAX, CAC-40, SMI) колеблется в промежутке от -0,1 до -0,5, коэффициент эксцесса - в промежутке от 1,63 до 4,17[10]. Для индекса РТС коэффициент эксцесса значимо положителен и составляет +8,44, коэффициент асимметрии отрицателен и равен -0,46 (использованы дневные данные за период с 2000 по 2011 г.). Для наиболее ликвидных активов российского фондового рынка гипотезу о нормальности можно принять лишь в отношении акций ВТБ, Лукойла и Норильского никеля.

Наблюдаемые нарушения гауссовости заставляют искать более гибкие модели ценовой динамики. Один из уроков последнего финансового кризиса состоит в том, что гауссовы распределения (в частности, гауссовы копулы) не способны адекватно описать зависимость между хвостами распределений доходности и потому не в состоянии уловить системные риски.

При сохранении предположения о независимости приращений имеются веские доводы в пользу того, что подходящие распределения следует искать в классе распределений Леви. Модели, основанные на процессах Леви, в последнее десятилетие приобрели особую популярность. Это объясняется тем, что процессы Леви позволяют достаточно адекватно описывать наблюдаемые явления: скачки, тяжелые хвосты и асимметрию распределений.

В работах Шутенса[11] показано, что хорошие результаты при описании ценовой динамики рисковых активов на развитых рынках получаются при использовании процессов Мейкснера (Meixner). Применительно к российскому рынку процессы Мейкснера были рассмотрены К.К. Борусяком[12]. Плотность распределения Мейкснера имеет следующий вид:

$$\varphi(x;\alpha,\beta,\delta,\mu)=$$
$$=\frac{(2\cos(\beta/2))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)}\exp\left(\frac{\beta(x-\mu)}{\alpha}\right)\left|\Gamma\left(\delta+\frac{ix}{\alpha}\right)\right|^2,$$

где $\alpha>0$, $-\pi<\beta<\pi$, ;
μ - смещение.

При оценке параметров методом моментов их значения являются решением системы уравнений на моменты распределения (с заменой истинных моментов на выборочные):

$$;\ \mathrm{V}\ =\frac{1}{2}\alpha^2\delta\cos^{-2}(\beta/2)\ ;$$

$$\mathrm{As}=\sin(\beta/2)\cdot\sqrt{2/\delta}\ ;\ \mathrm{Ex}=\frac{3-2\cos^2(\beta/2)}{\delta}\ .$$

Распределения Мейкснера обладают свойством бесконечной делимости. Все моменты существуют, и при любых допустимых значениях параметров коэффициент эксцесса положителен. На бесконечности плотность распределения Мейкснера убывает как $|x|^{2\delta-1}\exp(-b|x|)$ (с разными константами b в положительной и отрицательной области).

Для российского рынка параметры распределения Мейкснера оценивались для трехлетнего периода, предшествовавшего кризису, и за период с 2000 по 2011 г. Получены следующие значения параметров:

; ; ;
для периода 2004-2007 гг.;

; ; ;
для периода 2000-2011 гг.

Анализ данных показывает, что для периодов 25-75 дней модель с нормальным распределением работает лучше модели Мейкснера (нормальность доходностей еще соблюдается). При продолжительности прогнозного периода более 200 дней обе модели часто не соответствуют эмпирическому распределению. Наконец, для периодов в 100-150 дней модель Мейкснера работает определенно лучше классической модели, позволяя учесть отклонения от нормальности.

Приведем краткое описание модели для определения границ цен производных инструментов на рынках с трансакционными издержками, основанной на методе, предложенном Константинидесом и Перракисом[13].

На рынке имеется три вида активов: безрисковый актив (счет), рисковый актив и денежный (cash-settled) опцион колл-европейского типа на рисковый актив с ценой исполнения *K* и сроком исполнения *T*. Пусть *r* - безрисковая процентная ставка, а - брокерские комиссионные. Рынок многопериодный, т.е. сделки могут совершаться в фиксированные моменты времени *t* = 1, 2, ..., *T*. Чтобы приобрести *g* долей рискового актива в момент *t*, требуется снять со счета сумму , где S_t - цена рискового актива. Сняв сумму *b* со счета, можно приобрести единиц рискового актива. Продажа (или короткая продажа) единицы рискового актива увеличивает счет на величину . Ожидаемая брутто-доходность рискового актива не меняется от периода к периоду и превосходит безрисковую ставку *r*. Инвестор (трейдер) действует на рынке, максимизируя вогнутую функцию полезности.

Приводимые далее верхние и нижние границы опционов обладают следующим свойством: сделки по любой цене вне полученного диапазона допускают арбитраж.

В любой момент *t*, предшествующий моменту исполнения, цена продажи опциона будет ограничена сверху величиной

$$C_t = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{E[(S_T-K)^+ \mid S_t]}{(1+\mu)^{T-t}} .$$

Для получения данной оценки вычисляется интеграл

$$E[(S_T-K)^+ \left| S_t \right.] = $$
$$= \int\limits_{\ln\frac{K}{S_t}}^{+\infty} (S_t e^x - K)\varphi_{T-t}(x)dx,$$

где $\varphi_{T-t}(x)$ - плотность распределения логарифмической доходности за период .

Оценка снизу получается обратной индукцией. Для момента времени T имеем $\underline{C}_T = (S_T - K)^+$. Для момента $t<T$ оценка получается следующим образом:

$$\underline{C}_t = \frac{E[\underline{C}_{t+1} \mid S_t, S_{t+1} \le Z_t]}{1+r},$$

где величина Z_t определяется из уравнения

$$E\left[S_{t+1} \mid S_t, S_{t+1} \le Z_t\right] = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+r)S_t .$$

Условное математическое ожидание рассчитывается подобно тому, как это делается при вычислении верхней границы. Уравнение сначала преобразуется к виду

$$E[e^x \mid \rho \le \ln q] = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+r) ,$$

где $q = \frac{Z_t}{S_t}$, а $\rho = \frac{S_{t+1}}{S_t}$ - дневная доходность.

После этого для решения уравнения

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{\ln q} e^x \varphi(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{q} \varphi(x)dx} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+r) ,$$

где $\varphi(x)$ - плотность распределения доходности за единицу времени, применяются численные методы.

Можно использовать также некоторые модификации приведенных оценок. Например, с помощью обратной индукции можно получить следующую оценку:

;

$$\bar{C}(S_t, t) = \frac{E[\bar{C}(S_{t+1}, t+1)I(S_{t+1} - Z_t)|St]}{RE[I(S_{t+1} - Z_t)|S_t]}$$

при $t<T$. Здесь , если и если ,

а величина является решением уравнения

$$\frac{E[\bar{C}(S_{t+1}, t+1)I(S_{t+1} - Z_t) \mid S_t]}{E[I(S_{t+1} - Z_t) \mid S_t]} = \bar{C}(x, t+1) .$$

Экспериментальные расчеты проводились для опционов на фьючерс на индекс РТС, торгующихся на ФОРТС.

Как верхние, так и нижние границы, рассчитанные для распределения Мейкснера, являются более жесткими (диапазон более узкий), чем для нормального распределения. Нижние границы, полученные по методу стохастического доминирования для нормального распределения, получаются тривиальными. Для распределения Мейкснера диапазон между нижней и верхней границами примерно в 1,6 раз шире bid-ask-спрэда.

В некоторых случаях верхняя оценка с использованием распределения Мейкснера оказывалась меньше, чем средневзвешенная цена сделок (опцион “переоценен” рынком по сравнению с моделью). В то же время эта оценка укладывалась в диапазон bid-ask. Отметим, что цена, рассчитанная по формуле Блэка-Шоулза, как правило, лежит близко к верхней границе (и тоже находится внутри диапазона bid-ask).

Модели ценообразования на рынках с трансакционными издержками могут быть применены для вычисления справедливых цен с учетом ликвидности[14]. В этом случае роль ценового интервала $[(1-\varepsilon)S,(1+\varepsilon)S]$ играет диапазон bid-ask. Таким образом, рассматриваемые методы находят применение и для моделирования рынков без трансакционных издержек.

---

[1] См.: *Харитонов В.В., Ежов А.А.* Эконофизика. М., 2007; *Nolan J.* Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data. Birkhauser, 2010; *Di Nunno G., Oksendal B.* Advanced mathematical methods for finance. Springer, 2011.

[2] *Кудрявцев О.Е.* Эффективные математические методы вычисления цен опционов в моделях, допускающих скачки : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2012.

[3] *Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian // Motion and Applications. 2008. Springer.

[4] *Guasoni P, Muhle-Karbe J.* Portfolio Choice with Transaction Costs: a User's Guide // arXiv: 1207.7330v1 [q-fin.PM]. 2012. 31 Jul. P. 1-25.

[5] *Liu H., Loewenstein M.* Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons // Rev. Finan. Stud. 2002. № 15 (3). P. 805-835.

[6] *Guasoni P.* No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond // Mathematical Finance. 2006. 16. Issue 3. P. 569-582.

[7] *Constantinides G.M.*, *Perrakis S.* Stochastic dominance bounds on derivatives prices in a multiperiod economy with proportional transaction costs // J. of Economic Dynamics & Control. 2002. № 26. P. 1323-1352.

[8] *Kabanov Y., Safarian M.* Markets with transaction costs // Mathematical theory. 2009. Springer.

[9] См.: *Гисин В.Б., Марков А.А.* Ценообразование производных инструментов европейского типа на фрактальном рынке с транзакционными издержками // Вестник финансового университета. № 1 (61). 2011. С. 34-41; *Gisin V., Markov A.* Asset Pricing in a Fractional Market under Transaction Costs. P. 47-56 // Market Risk and Financial Markets Modeling / Sornette D, Ivliev S., Woodard H. (eds.). 2012. Springer.

[10] *Shoutens W.* Levy processes in finance // Pricing financial derivatives / John Wiley & Sons. 2003.

[11] Ibid.

[12] *Борусяк К.К.* Применение модели Мейкснера распределения доходности финансовых активов к российскому фондовому рынку // Математические методы анализа финансовых временных рядов : сб. науч. ст. / под ред. В.Б. Гисина, А.Б. Шаповала. М., 2008.

[13] *Constantinides G.M.*, *Perrakis S.* Op. cit.

[14] *Gerhold S., Guasoni P, Muhle-Karbe J.* Transaction Costs, Trading Volume, and the Liquidity Premium // arXiv: 1108.1167v4 [q-fin.PM]. 2013. 12 Jan. P. 1-29.

Поступила в редакцию 05.02.2013 г.