О стратегиях торговли с контролем “просадки” депозита

© 2013 В.В. Коннов
кандидат физико-математических наук
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации, г. Москва
E-mail: vvkonnov@inbox.ru

Рассматривается класс торговых стратегий, для которых закрытие позиций осуществляется в тот момент, когда “просадка” (DrawDown) от максимума составляет некоторую фиксированную величину. Доказывается, что доходности таких стратегий моделируются распределением Парето. Решается задача оптимизации предельной доходности стратегий при фиксированном уровне максимальных “просадок” счета в каждой отдельной сделке.

Ключевые слова: стратегия, торговый робот, “просадка”, предельная доходность, оптимизация, распределение Парето.

Хорошо известно, что наиболее опасным фактором механической торговли является возможность катастрофического отклонения вниз величины торгуемого депозита от своего первоначального значения. Даже для прибыльных (в среднем) стратегий появление больших “просадок” не редкость. Поэтому величина DrawDown (величина “просадки”) выступает наиболее популярной мерой риска в системной торговле. Для профессионального трейдера важно ограничить не только чрезмерное уменьшение первоначального счета, но также сохранить наблюдаемую виртуальную прибыль. Поэтому желательно контролировать “просадку” счета не только относительно его первоначального значения, но также относительно его наблюдаемого максимума.

Пусть торговый робот открывает позицию на доверенный ему капитал K_0. Обозначим через K_t стоимость активного капитала через время t. Если $K_t < \max\{K(s) \mid s \in [0,t]\}$, то будем говорить, что в момент времени наблюдается “просадка” счета (наблюдается DrawDown). Запрограммируем робота так, чтобы он не допустил “просадки” счета на величину, большую $B\%$. Для этого будем следить за максимально наблюдаемой ценой актива $C_{\max}(t) = \max\{C(s) \mid s \in [0,t]\}$, и выход по Stop Loss осуществим в момент t_{DD}, когда $C(t_{\mathrm{DD}}) = \beta \cdot C_{\max}(t_{\mathrm{DD}})$, где $\beta = 1 - B/100$. Поставим задачу описать вероятностные характеристики доходности такой торговой стратегии. Будем считать, что цена актива осуществляет геометрическое броуновское движение и находится в положительном тренде. Выясним, имеет ли смысл торговать всем капиталом и торговля какой долей будет наиболее эффективной.

1. Модель ценообразования и уровневые характеристики. Модель *геометрического броуновского движения с непрерывным временем*[1] предполагает, что логарифм относительного изменения цены актива $\ln\frac{C(t+s)}{C(t)}$ распределен нормально с математическим ожиданием $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)s$ и дисперсией $\sigma^2 s$, т.е. $\ln\frac{C(t+s)}{C(t)} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sqrt{s}\sigma Z_{t,s}$, где $Z_{t,s}$ - случайная величина, имеющая стандартный нормальный закон распределения. При этом, если временные отрезки $[t_1; t_1+s_1]$ и $[t_2; t_2+s_2]$ не пересекаются, то случайные величины Z_{t_1,s_1} и Z_{t_2,s_2} считаются независимыми. Константы μ и σ являются параметрами модели и называются, соответственно, *параметром смещения* и *волатильностью.* Будем считать, что $\mu > 0$. Нам понадобится величина $r = -\frac{2}{\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$. Заметим, что $\mu > 0 \Leftrightarrow r < 1$.

Пусть $\alpha > 1$ и $0 < \beta < 1$. Введем обозначения: TP - событие, заключающееся в том, что цена актива, находящаяся на уровне C, достигнет уровня $C\alpha$ раньше, чем уровня $C\beta$; SL - событие, заключающееся в том, что цена, находящаяся на уровне C, достигнет уровня $C\beta$ раньше, чем уровня $C\alpha$; $\mathrm{P(TP)} \equiv P_{(\alpha,\beta)}$; $\mathrm{P(SL)} \equiv Q_{(\alpha,\beta)}$; $T_{(\alpha,\beta)}$ - время, за которое произойдет одно из событий SL или TP. Можно доказать[2], что:

$$P_{(\alpha,\beta)} = \frac{1-\beta^r}{\alpha^r - \beta^r};\quad Q_{(\alpha,\beta)} = \frac{1-\alpha^r}{\beta^r - \alpha^r};$$

$$\mathrm{E}\,T_{(\alpha,\beta)} = \frac{P_{(\alpha,\beta)}\ln\alpha + Q_{(\alpha,\beta)}\ln\beta}{\mu - \sigma^2/2}.$$

2. Геометрическая модель торгового робота. Модель описывает класс роботов, в которых выход из позиции осуществляется по стратегии “скользящего Stop Loss”. При этом вход в позицию может осуществляться по различным алгоритмам. При срабатывании сигнала на покупку робот открывает позицию на весь капитал, покупая актив по рыночной цене C. Сразу после покупки выставляется Stop Loss по цене $C_- = \beta C$ и запоминает виртуальный Take Profit на уровне $C_+ = \alpha C$. Если цена достигает уровня виртуального Take Profit, то робот поднимает Stop-уровни, умножая предыдущие значения уровней Stop Loss и Take Profit на коэффициент α: $C_+ \mapsto \alpha C_+$, $C_- \mapsto \alpha C_-$. Если же цена достигает уровня Stop Loss, то робот закрывает позицию по цене текущего C_- и ждет нового сигнала на покупку, оставаясь вне рынка. Перечисленные правила составляют один *торговый цикл*: от момента открытия позиции до момента ее полного закрытия. Именно этот торговый цикл мы будем называть “сделка”. Доходности X_i в каждой сделке взаимно независимы и имеют одинаковые распределения:

X_i	β	$\beta\alpha$	...	$\beta\alpha^{k-1}$	...
P	Q	QP	...	QP^{k-1}	...

Здесь $P = P_{(\alpha,\beta)}$, $Q = Q_{(\alpha,\beta)}$, а α и β - параметры стратегии, удовлетворяющие условиям: $\alpha > 1$ и $0 < \beta < 1$. Параметры имеют следующую интерпретацию: α - параметр виртуального скользящего Take Profit; β - параметр скользящего Stop Loss. Модель имеет следующие вероятностные характеристики[3]:

$$\mathrm{E}\,X_i = \frac{\beta Q}{1-\alpha P},\quad \mathrm{D}\,X_i = \frac{PQ\beta^2(\alpha-1)^2}{(1-\alpha^2 P)(1-\alpha P)^2} \text{ -} \tag{1}$$

математическое ожидание и дисперсия доходностей каждой сделки (при $\alpha^2 P < 1$);

$$\mathrm{E}\ln X_i = \ln\left(\beta\cdot\alpha^{P/Q}\right);\quad \mathrm{D}\ln X_i = \frac{P}{Q^2}\ln^2\alpha \text{ -} \tag{2}$$

математическое ожидание и дисперсия логарифмов доходностей каждой сделки;

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\left(X_1X_2...X_n\right)^{1/n}\right] = \beta\cdot\alpha^{P/Q} \text{ -} \tag{3}$$

предельная доходность стратегии.

$$\mathrm{E}(T_{exit}) = \frac{P\ln\alpha + Q\ln\beta}{\mu - \sigma^2/2}\cdot\frac{1}{Q} \text{ -} \tag{4}$$

среднее время открытой позиции.

3. Оптимизация предельной доходности в геометрической модели. Формула (3) определяет предельную доходность стратегии при условии, что в каждой сделке участвует весь капитал. Предположим, что в каждой сделке участвует доля θ капитала. Стратегия из п. 2 модифицируется следующим образом. При срабатывании сигнала на покупку робот открывает позицию на долю θ капитала. Если цена достигает уровня виртуального Take Profit, то робот выполняет два действия. Во-первых, он перераспределяет активный и пассивный капитал таким образом, чтобы активный капитал по-прежнему составлял долю θ всего капитала. Это достигается тем, что робот закрывает часть позиций, т.е. частично фиксирует прибыль по цене текущего C_+. Во-вторых, он поднимает Stop-уровни, умножая предыдущие значения уровней Stop Loss и виртуального Take Profit на коэффициент α: $C_+ \mapsto \alpha C_+$, $C_- \mapsto \alpha C_-$. Если цена достигает уровня Stop Loss, то робот полностью закрывает позицию по цене текущего C_- и ждет нового сигнала на покупку.

Для торговли долей θ капитала предельная доходность стратегии получается из формулы (3) заменой: $\alpha \mapsto \alpha\theta + 1 - \theta$; $\beta \mapsto \theta\beta + 1 - \theta$. Оптимизационная задача:

$$\mathbf{M}(\theta) \equiv (\beta\theta + 1 - \theta)\cdot(\alpha\theta + 1 - \theta)^{P/Q} \to \max,$$

где $\dfrac{1}{1-\alpha} \le \theta \le \dfrac{1}{1-\beta}$,

имеет решение[4]

$$\theta_{\max} = \frac{P\alpha + Q\beta - 1}{(\alpha-1)(1-\beta)}, \tag{5}$$

где $P = P_{(\alpha,\beta)}$ и $Q = Q_{(\alpha,\beta)}$.

Заметим, что ограничения $\dfrac{1}{1-\alpha} \le \theta \le \dfrac{1}{1-\beta}$ гарантируют, что при любом стечении обстоятельств капитал инвестора буде неотрицательным.

4. Моделирование торгового робота непрерывным распределением Парето. В геометрической модели торгового робота уровень скользящего Stop Loss контролирует просадку доходности от значения, наблюдаемого в момент последней перестройки позиции. При этом если максимум цены увеличивается менее чем в α раз, то робот не предпринимает никаких действий. При уменьшении параметра α будет увеличиваться число этапов стратегии внутри одной сделки. В предельном случае, когда $\alpha \to 1+0$, число этапов стремится к бесконечности и робот будет реагировать на каждое положительное приращение ценового максимума. В этом случае уровень скользящего Stop Loss будет контролировать “просадку” доходности от наблюдаемого максимума. При этом распределение доходности станет непрерывным. Робот, реализующий описанную стратегию, выйдет из позиции в момент t_{DD}, когда $C(t_{\text{DD}}) = \beta \cdot C_{\max}(t_{\text{DD}})$, где $\beta = 1 - B/100$. То есть закрытие позиции произойдет в случае, если просадка счета от наблюдаемого максимума (DrawDown от максимума) составит $B\%$.

Найдем вероятностные характеристики такой предельной стратегии - ***стратегии с контролем "просадки от максимума"***. Прежде всего, найдем функцию распределения доходностей X_i в каждой сделке при $\alpha \to 1+0$. Для геометрической модели имеем: $X_i < x \Leftrightarrow (\theta\alpha + 1 - \theta)^{n-1}(\theta\beta + 1 - \theta) < x$

$\Leftrightarrow \quad n < h(\alpha, x) \equiv \dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{\theta\beta + 1 - \theta}\right)}{\ln(\theta\alpha + 1 - \theta)} + 1$. Поэтому

$P(X_i < x) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} P^{k-1} Q = 1 - P^{\tilde{n}}$, где $\tilde{n}$ - наибольшее целое решение неравенства $n < h(\alpha, x)$. Подставляя $P = P_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{1 - \beta^r}{\alpha^r - \beta^r}$ и переходя к пределу при $\alpha \to 1+0$, для непрерывной модели получим:

$$P(X_i < x) = \lim_{\alpha \to 1+0}\left(1 - \left(P_{(\alpha,\beta)}\right)^{\tilde{n}(\alpha)}\right) = 1 - \left(\frac{x}{\theta\beta + 1 - \theta}\right)^{\frac{r}{\theta(\beta^r - 1)}}.$$

Таким образом:

$$F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\theta\beta + 1 - \theta}{x}\right)^{\frac{r}{\theta(1-\beta^r)}}, \text{ где } x \ge \theta\beta + 1 - \theta. \quad (6)$$

Для доли θ торгуемого капитала имеются естественные ограничения: $0 \le \theta \le \dfrac{1}{1-\beta}$, которые гарантируют, что при любом стечении обстоятельств капитал инвестора будет неотрицательным. Из формулы (6) следует, что доходности X_i имеют *распределение Парето* с *коэффициентом масштаба* $\boldsymbol{\mu} = \theta\beta + 1 - \theta$ и *показателем* $\mathbf{k} = \dfrac{r}{\theta(1-\beta^r)}$. Используя формулу (6), последовательно находим характеристики для доходностей X_i:

$f_{X_i}(x) = \dfrac{r}{\theta(1-\beta^r)} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\theta\beta + 1 - \theta}{x}\right)^{\frac{r}{\theta(1-\beta^r)}}$ - плотность вероятности;

$\mathrm{E}\, X_i = \dfrac{\theta\beta + 1 - \theta}{\theta\beta^r + r - \theta} \cdot r$ - математическое ожидание (если $\mathbf{k} > 1$);

$\mathrm{D}\, X_i = \dfrac{(\beta^r - 1)^2 (\theta\beta + 1 - \theta)^2 \theta^2 r}{(r - 2\theta + 2\theta\beta^r)(r - \theta + \theta\beta^r)^2}$ - дисперсия (если $\mathbf{k} > 2$).

Среднее время открытой позиции получим из формулы (4) предельным переходом при $\alpha \to 1+0$: $\mathrm{E}(T_{exit}) = \dfrac{\ln\beta^r + 1 - \beta^r}{(\mu - \sigma^2/2)r}$.

Теперь найдем характеристики логарифмов доходностей $\ln X_i$ каждой сделки:

$\mathrm{E}\ln X_i = \ln\left((\theta\beta + 1 - \theta)e^{\frac{1-\beta^r}{r}\cdot\theta}\right)$ - математическое ожидание;

$\mathrm{D}\ln X_i = \dfrac{\theta^2(1-\beta^r)^2}{r^2}$ - дисперсия.

5. Ограничение на DrawDown и принцип максимума энтропии. При описании процесса ценообразования актива рассматривалась модель геометрического броуновского движения. Для доходности стратегии с контролем "просадки от максимума" это привело к распределению Парето. Интересно отметить, что эту стратегию имеет смысл моделировать распределением Парето не только для рынка геометрического броуновского движения.

Предположим, что рынок имеет более сложную структуру, но за счет выбора моментов входа в рынок, стратегия с контролем "просадки от максимума" статистически согласуется с гипотезой постоянства математического ожидания логарифмов доходностей в каждой сделке. Мы хотим найти распределение, описывающее доходности сделок. Имеем два условия:

- носителем доходностей X_i является интервал $[\boldsymbol{\mu}; +\infty)$, где $\boldsymbol{\mu}$ - параметр допустимой "просадки от максимума", $0 < \boldsymbol{\mu} < 1$;
- $\mathrm{E}\ln X_i = \boldsymbol{\omega} > 0$ - постоянная величина.

Пусть $f(x)$ - неизвестная плотность распределения доходностей X_i. Для ее нахождения применим *принцип максимума энтропии*, приводящий к статистически устойчивому распределению. Функцию $f(x)$ будем искать, как решение вариационной задачи: $\mathbf{H}(f) \equiv -\mathrm{E}\ln f(x) = -\int_{\boldsymbol{\mu}}^{\infty} \ln(f(x)) f(x)dx \to \max$ с ограничениями: $\int\limits_{\mu}^{\infty} f(x)dx = 1$ и $\int\limits_{\mu}^{\infty} (\ln x) f(x)dx = \boldsymbol{\omega}$.

Можно показать, что решением этой задачи является плотность Парето:

$f(x) = \dfrac{1}{x(\boldsymbol{\omega} - \ln \boldsymbol{\mu})} \left(\dfrac{\boldsymbol{\mu}}{x} \right)^{\frac{1}{\boldsymbol{\omega} - \ln \boldsymbol{\mu}}}$ с функцией распределения $F(x) = 1 - \left(\dfrac{\boldsymbol{\mu}}{x} \right)^{\frac{1}{\boldsymbol{\omega} - \ln \boldsymbol{\mu}}}$, сосредоточенной на интервале $[\boldsymbol{\mu}; +\infty)$.

6. Предельная доходность и ее оптимизация. Для нахождения предельной доходности воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Пусть X_i - взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины, для которых $\mathrm{E} \ln X_i = a < \infty$, $\mathrm{D} \ln X_i = b < \infty$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{E}\left(X_1 X_2 ... X_n\right)^{1/n} = e^a$.

Действительно, для нормальной случайной величины U имеет место равенство: $\mathrm{E} e^U = e^{\mathrm{E}U + \frac{1}{2}\mathrm{D}U}$. При $n \to \infty$ величина $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i$ сходится к нормальной случайной величине с параметрами $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i \right) = a$ и $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i \right) = \dfrac{b}{n}$. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}\left(X_1 X_2 ... X_n\right)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \mathrm{E} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} = \lim_{n \to \infty} e^{a + \frac{b}{2n}} = e^a.$$

Для предельной доходности рассматриваемой стратегии, в силу леммы, можем записать:

$$\mathbf{M}(\theta) = \left(\theta\beta + 1 - \theta\right) e^{\frac{1-\beta^r}{r}\cdot\theta}. \qquad (7)$$

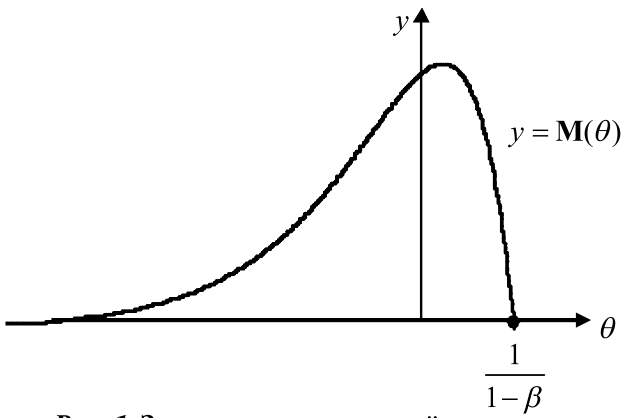

Рис. 1. **Зависимость предельной доходности от доли активного капитала**

График функции $y = \mathbf{M}(\theta)$ представлен на рис. 1.

Глобальный максимум $\mathbf{M}_{\max} = r \cdot \dfrac{1-\beta}{1-\beta^r} e^{\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\beta^r}{1-\beta} - 1}$ этой функции достигается в точке

$$\theta_0 = \frac{1}{1-\beta} - \frac{r}{1-\beta^r}. \qquad (8)$$

Носителем доходности X_i в каждой сделке является интервал $[\theta\beta + 1 - \theta; +\infty)$. Допустим, что инвестор хочет, за счет выбора доли активного капитала θ, ***ограничить максимально допустимый убыток в каждой сделке величиной*** $\delta \cdot 100\%$ ***и максимизировать при этом предельную доходность*** $\mathbf{M}(\theta)$. В таком случае задача оптимизации принимает вид

$$\mathbf{M}(\theta) \to \max, \text{ если } 0 \le \theta \le \frac{\delta}{1-\beta}. \qquad (9)$$

Для растущего рынка (т.е. при $r < 1$) можно доказать, что $\theta_0 > 0$. Поэтому для решения задачи (9) достаточно рассмотреть случаи: $\dfrac{\delta}{1-\beta} \le \theta_0$, или $\theta_0 < \dfrac{\delta}{1-\beta}$ (см. рис. 2). В первом случае

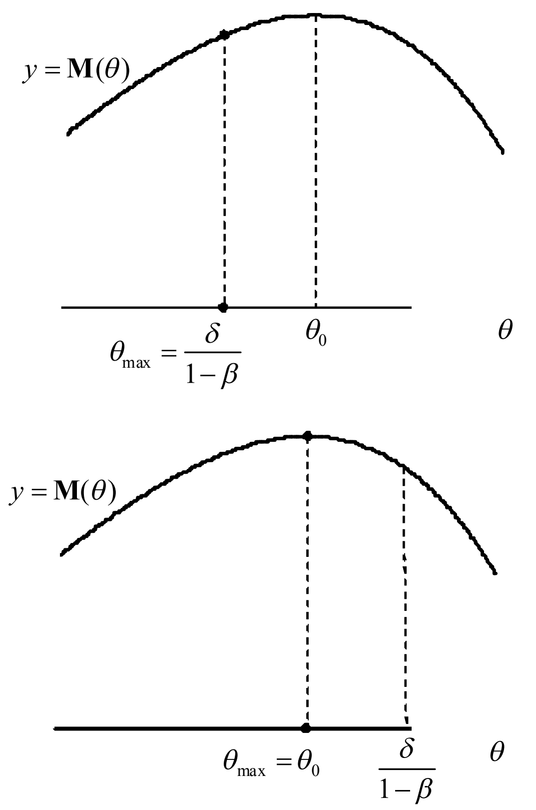

Рис. 2. **Выбор оптимального решения в задаче (9)**

$\theta_{\max} = \dfrac{\delta}{1-\beta}$, во втором $\theta_{\max} = \theta_0$. Таким образом, при $r < 1$, решение задачи (9) можно записать в виде

$$\theta_{\max} = \min\left\{\frac{\delta}{1-\beta}, \frac{1}{1-\beta} - \frac{r}{1-\beta^r}\right\}.$$

Пример. Допустим, что статистический анализ позволяет с удовлетворительной надежностью утверждать, что цена некоторого актива осуществляет геометрическое броуновское движение. Предположим, что оценка пятиминутных параметров сноса и волатильности дает следующий результат: $\mu = 4,473 \cdot 10^{-6}$, $\sigma = 2,366 \cdot 10^{-3}$. Робот запрограммирован закрывать позицию, если DrawDown от максимума цены актива составит 2 %. Рассчитаем оптимальную долю активного капитала, которую должен поддерживать робот, чтобы максимизировать предельную доходность и не допустить убытка в каждой сделке более чем 1,8 %. В рамках принятых ранее обозначений находим: $r = -0,5980833$, $\beta = 0,98$, $\delta = 0,018$. Поскольку $\dfrac{\delta}{1-\beta} = 0,9$ и $\theta_0 = 0,8001230$, постольку оптимальная доля активного капитала должна составлять $\theta_{\max} = 0,8001230$. При торговле оптимальной долей капитала параметры оптимальной стратегии будут иметь следующие характеристики: $\mathrm{E}\,X_i = 1,000265$ - средняя доходность каждой отдельной сделки; $\mathbf{M}_{\max} = 1,000131$ - предельная доходность стратегии. Отметим, что среднее время открытой позиции каждой отдельной сделки будет равно $\mathrm{E}(T_{exit}) = 73,2$ (пятиминутных интервала), что составляет 6,1 ч.

---

[1] Финансовая экономика / Х. Пенджер [и др.]. М., 2005.

[2] *Гисин В.Б., Коннов В.В., Шаров В.Ф.* Вероятностные модели для анализа ценообразования активов на фондовых рынках: монография. М., 2012.

[3] Там же.

[4] Там же.

Поступила в редакцию 04.01.2013 г.