Трендоустойчивость стратегий и оптимизация торговых роботов

© 2013 В.В. Коннов
кандидат физико-математических наук
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации, г. Москва
E-mail: vvkonnov@inbox.ru

При помощи цепи Маркова моделируется процесс управления торговым роботом, учитывающим корреляции в последовательности сделок. Решается задача максимизации предельной доходности торгового робота за счет оптимального выбора объема открытых позиций.

Ключевые слова: стратегия, торговый робот, бинарный процесс, предельная доходность, оптимизация.

1. Введение

Одной из важнейших характеристик эффективности торгового робота является статистика выигрышных и убыточных трансакций. Предположим, торговый робот осуществляет сделки по некоторому алгоритму. Если ξ_i - величина выигрыша после сделки с номером *i*, то индикаторы прибыльности сделок $I_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i > 0 \\ 0, & \text{если } \xi_i \le 0 \end{cases}$ образуют бинарную последовательность случайных величин. Оценить вероятность $p_i = P(I_i = 1)$ успеха каждой отдельной сделки невозможно. Поэтому удобно считать, что для каждой сделки вероятность успеха одна и та же, и принимать за $p_i = p$ относительную частоту ν прибыльных трансакций. Анализ случайного процесса $\{I_i\}$ на *трендоустойчивость* связан с выявлением корреляций в последовательности величин I_i. В случае независимости величин модель робота привязывается к схеме Бернулли. Если величины I_i взаимозависимы, то между результатами сделок возникает корреляция, и это можно использовать для увеличения эффективности торгового робота. При положительной корреляции имеет смысл увеличивать активный капитал после выигрышных сделок и уменьшать после проигрышных. В случае отрицательной корреляции - наоборот. Эта тактика хорошо известна трейдерам. Поэтому одной из задач анализа торговых стратегий является исследование последовательности $\{I_i\}$ на трендоустойчивость. Для решения этой задачи обычно используется так называемый *критерий серий*[1] (или, что то же самое, *z-счет стратегии*).

В случае выявления значимой корреляции между результатами сделок, последовательность $\{I_i\}$ будем моделировать *почти бернуллиевским процессом*[2]. В рамках этой модели будет решена задача оптимального выбора объема открытой позиции, максимизирующего *предельную доходность* стратегии.

2. *z*-счет бинарного процесса при известной вероятности

Следуя Ральфу Винсу, традиционно, про критерий серий пишут примерно следующее[3]: "*z*-счет - это статистическая величина, позволяющая трейдерам анализировать зависимость между сделками. *z*-счет рассчитывается путем сравнения количества серий в наборе сделок относительно количества серий, которое можно было бы ожидать при статистической независимости результатов текущей сделки от прошедших сделок".

Пусть имеется *бернуллиевский* случайный процесс, т.е. последовательность $\{I_i\}_{i=1,2,\dots}$ независимых случайных величин с одинаковым законом распределения: $I_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p; \\ 0, & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$ Обозначим, через $R_\text{В}$ число трендов процесса $\{I_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ за *n* шагов. Например, в последовательности $\{0,0,1,0,1,1,1\}$ имеется 4 тренда.

С процессом Бернулли $\{I_i\}_{i=1,2,\dots}$ можно сопоставить новый (уже небернуллиевский) *процесс кластеризации* $\{J_i\}_{i=1,2,\dots}$ (процесс образования трендов) по правилу: $J_i = \begin{cases} 1, & \text{если } I_i \ne I_{i-1} \\ 0, & \text{если } I_i = I_{i-1} \end{cases}$. Случайную величину J_i будем называть *индикатором кластеризации*. Он выдает единицу, если на *i*-м шаге начинается новый тренд, и - ноль в противном случае. Направление тренда индикатором J_i не учитывается (неважно, какая образуется серия - "серия успехов" или "серия неудач").

Очевидно, что $R_\text{В} = \sum_{k=1}^{n} J_k$. Начиная со второго члена, последовательность $\{J_k\}$ совпадает со *стационарной последовательностью в узком смысле*[4]. Следовательно, при $n \to \infty$ закон распределения числа трендов $R_{\text{В}}$ бернуллиевского процесса сходится к нормальному закону. Можно доказать[5], что при известной вероятности p имеют место равенства:

$$\mathrm{E}R_{\text{В}} = 1 + 2pq(n-1), \tag{1}$$

$$\mathrm{D}R_{\text{В}} = 2pq(1-2pq)(n-1) + \\ +2pq(1-4pq)(n-2), \tag{2}$$

где $n \geq 2$ (при $n = 1$: $\mathrm{E}R_{\text{В}} = 1$, $\mathrm{D}R_{\text{В}} = 0$). Величину

$$Z_{\text{В}} \equiv \frac{R_{\text{В}} - \mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{d}}}, \tag{3}$$

где $\mathrm{m} = \mathrm{E}R_{\text{В}}$ и $\mathrm{d} = \mathrm{D}R_{\text{В}}$ вычисляются по формулам (1) и (2), естественно назвать *z-счетом бернуллиевского процесса при известной вероятности* p. Закон распределения случайной величины $Z_{\text{В}}$ при $n \to \infty$ сходится к стандартному нормальному закону: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{Z_{\text{В}} < x\} = \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Для определения z-счета небернуллиевского бинарного процесса с известной вероятностью p необходимо в формуле (3) заменить R_B на наблюдаемое число трендов R, оставив без изменения m и d:

$$Z \equiv \frac{R - \mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{d}}}. \tag{4}$$

При этом закон распределения Z может отличаться от стандартного нормального закона даже при $n \to \infty$.

3. *z*-счет бинарного процесса при неизвестной вероятности

Если вероятность p бинарного процесса $\{I_i\}$ неизвестна, то за ее оценку чаще всего выбирают частоту ν появления единиц в последовательности $\{I_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Предположим, что мы знаем несмещенную оценку $\hat{\mathrm{m}}$ для $\mathrm{m} = \mathrm{E}R_{\text{В}}$ как функцию частоты ν. Тогда числитель в формуле (3) имеет смысл записать в виде $R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}}$. Но тогда $R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}}$ - это разность двух зависимых случайных величин, имеющая нулевое математическое ожидание и дисперсию, не равную, вообще говоря, единице. Чтобы перейти к нормированной случайной величине, необходимо разделить $R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}}$ на $\sqrt{\mathrm{D}(R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}})}$. Поэтому в формуле (3) необходимо заменить $\mathrm{d} = \mathrm{D}R_{\text{В}}$ на $\mathrm{D}(R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}})$. При этом неслучайная величина $\mathrm{D}(R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}})$ будет функцией неизвестного параметра p. Поэтому вместо $\mathrm{D}(R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}})$ приходится использовать ее несмещенную оценку, выраженную через частоту ν. Пусть $\hat{\mathrm{d}}$ - такая несмещенная оценка. Тогда *z*-счет можно будет определить следующим образом: $Z_{\text{В}} \equiv \frac{R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}}}{\sqrt{\hat{\mathrm{d}}}}$. Для бинарного процесса общего вида получится, соответственно, формула:

$$Z \equiv \frac{R - \hat{\mathrm{m}}}{\sqrt{\hat{\mathrm{d}}}}. \tag{5}$$

Используя метод моментов, можно доказать[6], что:

$$\hat{\mathrm{m}} = 1 + 2\nu(1-\nu)n; \tag{6}$$

$$\mathrm{D}(R_{\text{В}} - \hat{\mathrm{m}}) = 2pq\frac{n-2}{n}\left(2pqn + 1 - 6pq\right); \tag{7}$$

$$\hat{\mathrm{d}} = \frac{n}{n-1} \cdot 2\nu(1-\nu)\left(2\nu(1-\nu)n - 1\right). \tag{8}$$

С учетом равенств (6) и (8) формула (5) Z принимает вид

$$Z \equiv \frac{R - \left(1 + 2\nu(1-\nu)n\right)}{\sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{2\nu(1-\nu)\left(2\nu(1-\nu)n - 1\right)}}. \tag{9}$$

Таким образом, при неизвестной вероятности p, *z*-счет бинарного процесса $\{I_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ следует определить формулой (9).

4. Доверительная вероятность *z*-счета

Если последовательность $\{I_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ является последовательностью независимых случайных величин, то закон распределения величины Z с ростом n сходится к стандартному нормальному закону. Часто при работе с *z*-счетом рассматривают так называемую *доверительную вероятность z-счета*: $\theta(Z) = 2\Phi(|Z|) - 1$. Таким образом, $\theta(Z) = P(-|Z| \leq X \leq |Z|)$ - вероятность попадания стандартной нормальной случайной величины X в интервал от $-|Z|$ до $|Z|$. Иногда доверительную вероятность $\theta(Z)$ выражают в процентах. Предположим, что для некоторой стратегии после n сделок посчитаны значения Z и $\theta(Z)$. Если $\theta(Z)$ близко к 1, то это означает что либо мы наблюдаем небернуллиевский процесс, либо, если процесс бернуллиевский, мы наблюдаем статистически редкую траекторию выборочного процесса.

Рассмотрим пример**.** Проследим за результатом работы двух торговых роботов по итогам 20 сделок. Пусть $\left\{{}^{(1)}I_k\right\}$ и $\left\{{}^{(2)}I_k\right\}$ - последовательности индикаторов успеха сделок для первого и второго робота, соответственно.

${}^{(1)}I_k$	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
${}^{(2)}I_k$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Частота выигрышных сделок у обоих роботов одинакова и равна 0,6. Примем ее за оценку вероятности p успеха в каждой сделке. Для процесса Бернулли с $\nu = 0{,}6$, следуя формулам (6) и (8), можно записать: $\hat{\mathrm{m}} = 10{,}6$, $\hat{\mathrm{d}} \approx 4{,}345$. Наблюдаемое число трендов $R_1 = 9$ для первого робота и $R_2 = 4$ для второго. Значит, $Z_1 = \dfrac{R_1 - \hat{\mathrm{m}}}{\sqrt{\hat{\mathrm{d}}}} \approx -0{,}77$, $Z_2 = \dfrac{R_2 - \hat{\mathrm{m}}}{\sqrt{\hat{\mathrm{d}}}} \approx -3{,}17$. Отклонение $R - \hat{\mathrm{m}}$ числа трендов от ожидаемого числа трендов бернуллиевского процесса составляет приблизительно $-0{,}77\sqrt{\hat{\mathrm{d}}}$ для первого робота и $-3{,}17\sqrt{\hat{\mathrm{d}}}$ для второго. Следовательно, первый робот с большей вероятностью соответствует модели Бернулли. Оценивать доверительные вероятности при помощи асимптотического нормального распределения нельзя ввиду малого объема выборки, но нарушение “правила трех сигм” наводит на мысль о наличии существенных корреляций между исходами сделок второго робота.

5. Почти бернуллиевский процесс

Рассмотрим простейшее обобщение бернуллиевского процесса, при котором можно учесть взаимную зависимость сделок. Предположим, что имеется последовательность $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$ одинаково распределенных величин:

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p; \\ 0, & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$$

Будем называть процесс $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$ *почти бернуллиевским процессом*, если выполняются два условия: $P(I_k|I_1;I_2;\dots;I_{k-1}) = P(I_k|I_{k-1})$ для $k > 1$ и $P(I_k|I_{k-1})$ не зависит от номера k. Эти условия означают, что. начиная со второго шага процесса, мы рассматриваем однородную цепь Маркова. Цепь имеет три состояния: A_0 - начало процесса; A_+ - последний шаг был “успехом”; A_- - последний шаг был “неудачей”. Введем обозначения: $P(I_k = 0|I_{k-1} = 0) = q_-$; $P(I_k = 0|I_{k-1} = 1) = q_+$; $P(I_k = 1|I_{k-1} = 0) = p_-$; $P(I_k = 0|I_{k-1} = 1) = p_+$. Граф цепи представлен на рисунке.

Для данной цепи матрица переходных вероятностей $p_{ij}^{(1)} = P(I_k = j \mid I_{k-1} = i)$ за один шаг имеет вид $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} q_- & p_- \\ q_+ & p_+ \end{pmatrix}$. Совместное распределение

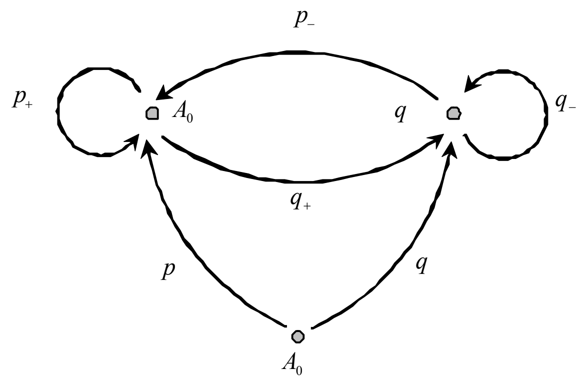

***Рис.* Граф почти-бернуллиевского процесса**

$P(I_k = j; I_{k-1} = i)$ определяется матрицей: $\mathrm{F} = \begin{pmatrix} q \cdot q_- & q \cdot p_- \\ p \cdot q_+ & p \cdot p_+ \end{pmatrix}$. Пусть $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(I_{k-1}, I_k)}{\sqrt{\mathrm{D}I_{k-1}} \cdot \sqrt{\mathrm{D}I_k}} = \dfrac{p_+ - p}{q}$ - коэффициент корреляции соседних индикаторов, тогда:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} q + \rho q & p - \rho p \\ q - \rho q & p + \rho q \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} q^2 + \rho \cdot qp & pq - \rho \cdot qp \\ pq - \rho \cdot qp & p^2 + \rho \cdot qp \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что матрица переходных вероятностей $p_{ij}^{(l)} = P(I_k = j \mid I_{k-l} = i)$ за l шагов имеет вид

$$\mathrm{P}^l = \begin{pmatrix} q + \rho^l \cdot p & p - \rho^l \cdot p \\ q - \rho^l \cdot q & p + \rho^l \cdot q \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $p \neq 1$, $q \neq 1$ и $\rho \neq \pm 1$. Тогда к процессу $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$ применима центральная предельная теорема: $\lim\limits_{n \to \infty} F_{S_n}(x) = \Phi\left(\dfrac{x - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}}\right)$, где $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$. При этом $\mathrm{E}S_n = np$,

$$\mathrm{D}S_n = npq + 2(n-1)pq\frac{\rho\left(1 - \rho^n\right)}{1 - \rho}.$$

Теперь, рассматривая процесс кластеризации $\{J_i\}_{i=1,2,\dots}$ для процесса $\{I_k\}_{k=1,2,\dots}$, можно вывести формулы:

$$\mathrm{E}R = 1 + 2pq(1 - \rho)(n - 1); \tag{10}$$

$$\mathrm{D}(R) = (n-1)2pq(1-\rho)(1 - 2pq(1-\rho)) + \\ +2pq(1 - 4pq)\Big((n-2)(1-\rho) - \left(\rho - \rho^{n-1}\right)\Big). \tag{11}$$

Заметим, что формулы (1), (2) получаются из (10), (11) при $\rho = 0$.

Предположим, что параметры p и ρ известны. Тогда для z-счета $Z \equiv \frac{R - \mathrm{E} R_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{D} R_{\mathrm{B}}}}$ почти бернуллиевского процесса можем записать:

$$\mathrm{E} Z \equiv \frac{\mathrm{E} R - \mathrm{E} R_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{D} R_{\mathrm{B}}}}, \quad \mathrm{D} Z \equiv \frac{\mathrm{D} R}{\mathrm{D} R_B},$$

где $\mathrm{E} R$ и $\mathrm{D} R$ вычисляются по формулам (10), (11), а $\mathrm{E} R_{\mathrm{B}}$ и $\mathrm{D} R_{\mathrm{B}}$ - по формулам (1) и (2). Так как $\mathrm{E} R - \mathrm{E} R_{\mathrm{B}} = -2\rho pq(n-1)$, то корреляция и математическое ожидание z-счета имеют противоположные знаки. При $n \to \infty$ справедливы соотношения:

$$\mathrm{E} Z \propto -\rho\sqrt{n}\sqrt{\frac{pq}{1-3pq}}, \quad \mathrm{D} Z \propto \left(1 + \frac{pq}{1-3pq}\rho\right)(1-\rho).$$

Если наблюдается почти бернуллиевский процесс и вероятность p известна, то в качестве оценки коэффициента корреляции ρ можно взять $\hat{\rho} = 1 - \frac{\bar{R} - 1}{2pq(n-1)}$, где $\bar{R}$ - выборочное среднее числа трендов, полученное при достаточно большом количестве тестов процесса одной и той же продолжительности n.

6. Учет корреляции при оптимизации торговой стратегии

Предположим, что торговый робот осуществляет сделки следующим образом. При появлении определенной совокупности сигналов технического анализа робот входит в рынок, открывая позицию на покупку или продажу. Затем, если виртуальная прибыль или убыток от вложенных средств достигают соответственно $A\,\%$ или $B\,\%$, то позиция закрывается. Допустим, что результаты тестирования робота на всевозможных симуляторах и реальных исторических данных позволяют утверждать, что индикаторы успеха в последовательности сделок образуют почти бернуллиевский процесс с параметрами p и ρ. Существенным параметром, влияющим на результаты торговли робота, является доля капитала, участвующего в сделках. Если в сделке участвует весь капитал, то доходность на шаге с номером n равна:

$$X_n = \begin{cases} u, & \text{с вероятностью } p, \\ v, & \text{с вероятностью } q, \end{cases}$$

где $u = 1 + A/100$, $v = 1 - B/100$.

Варьируя долю активного капитала, можно оптимизировать ожидаемый результат торговли, не меняя алгоритмов открытия и закрытия позиций. Выбор целевой функции в задаче оптимизации может быть различным, поскольку зависит от предпочтений инвестора и его отношения к риску. Рассмотрим, например, задачу оптимизации, так называемой ***предельной доходности***:

$$\mathrm{M} \equiv \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\left(X_1 X_2 \ldots X_n\right)^{1/n}\right].$$

Пусть в первой сделке участвует доля z капитала, после успешной сделки торгуется доля x капитала, а после убыточной сделки - доля y. Имеем следующие распределения для доходностей:

X_1	U	V
P	p	q

где $U \equiv z(u-1)+1$, $V \equiv z(v-1)+1$, и

X_i ($i = 2,3,\ldots$)	U_+	V_+	U_-	V_-
P	pp_+	pq_+	qp_-	qq_-

где $U_+ \equiv x(u-1)+1$, $V_+ \equiv x(v-1)+1$, $U_- \equiv y(u-1)+1$, $V_- \equiv y(v-1)+1$. Предельная доходность будет выражаться формулой[7]:

$$\mathrm{M} = U_+^{pp_+} V_+^{pq_+} U_-^{qp_-} V_-^{qq_-}. \qquad (12)$$

Заметим, что предельная доходность M не зависит от доли капитала z, участвующего в первой сделке. Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$\mathrm{M} \to \max$$

с неизвестными x и y. Несложно проверить, что ее решение достигается в точке:

$$x_0 = \frac{p_+}{1-v} - \frac{q_+}{u-1}, \quad y_0 = \frac{p_-}{1-v} - \frac{q_-}{u-1}. \qquad (13)$$

Выражая p_+, q_+, p_-, q_- через p, $q = 1-p$ и коэффициент корреляции ρ, оптимальное решение (13) можно представить в виде

$$x_0 = z_0 + \rho q \frac{u-v}{(u-1)(1-v)}, \quad y_0 = z_0 - \rho p \frac{u-v}{(u-1)(1-v)},$$

где $z_0 = \frac{p}{1-v} - \frac{q}{u-1}$.

В частности, если $\rho = 0$, то оптимальная доля капитала, участвующая в каждой сделке, будет равна $z_0 = \frac{p}{1-v} - \frac{q}{u-1}$.

---

[1] *Винс Р.* Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров. М., 2011.

[2] *Гисин В.Б., Коннов В.В., Шаров В.Ф.* Вероятностные модели для анализа ценообразования активов на фондовых рынках: монография. М., 2012.

[3] Money Software Company: “KNOW MONEY MANAGEMENT PROGRAM” - “Тысячи и немедленно - Секреты Управления Капиталом” / Дилинговый Центр ННГУ. 1997.

[4] *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965.

[5] *Гисин В.Б., Коннов В.В., Шаров В.Ф.* Указ. соч.

[6] Там же.

[7] Там же.

Поступила в редакцию 04.12.2012 г.