Определение ожидаемого ущерба страховщика в зависимости от уровня его ответственности для различных систем страхования

© 2012 Е.П. Ростова
кандидат экономических наук, доцент
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)
E-mail: el_rostova@mail.ru

Представлен анализ взаимосвязи размера ожидаемого ущерба страховщика от уровня его ответственности для различных систем страховой ответственности. Получены формулы, позволяющие определить ожидаемый ущерб при различных распределениях случайной величины ущерба от страхового события.

Ключевые слова: страхование, предел ответственности, системы страховой ответственности, функция распределения ущерба.

Различные системы страховой ответственности, используемые в страховании, позволяют страховщику и страхователю формировать договор, наиболее гибко учитывая интересы обеих сторон. Для страховщика важно правильно оценить ожидаемый ущерб, влияющий на размер страховой премии, поскольку он является мерой риска, принимаемого страховой компанией. В зависимости от системы страховой ответственности, размера собственного удержания, периода страхования величина ожидаемого ущерба страховщика может варьироваться.

Рассмотрим различные варианты договоров страхования, классифицированные по системам страховой ответственности, а именно договор страхования по системе “первого риска”, пропорциональное страхование, страхование с безусловной или с условной франшизой. В зависимости от функции распределения риска получим различные функциональные зависимости, отражающие величину ожидаемого ущерба страховщика.

Математическое ожидание ущерба страховщика определим по формуле $M(Y) = M(Y|A)\cdot P(A)$[1], где $M(Y)$ - математическое ожидание ущерба страховщика; $M(Y|A)$ - математическое ожидание ущерба страховщика при условии наступления страхового случая; $P(A)$ - вероятность наступления страхового случая.

Вероятность наступления страхового случая есть функция $\varphi(t)$, зависящая от времени t. $M(Y|A)$ зависит:

- от способа распределения ответственности между страховщиком и страхователем $otv(x)$;
- распределения ущерба от страхового случая $f(x)$.

В качестве функций $\varphi(t)$ и $f(x)$ могут выступать известные функции плотностей распределения вероятностей.

Таким образом, зная закон распределения случайной величины, описывающей размер ущерба при наступлении страхового случая и систему страховой ответственности, описанную в договоре, можно определить ожидаемый ущерб страховщика[2]:

$$M(Y) = M(Y|A)\cdot P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)otv(x)dx\int_0^T \varphi(t)dt,$$

где T - период действия договора страхования, измеряемый в годах.

Такое допущение удобно, поскольку чаще всего договор страхования заключается на один год, после чего договор возобновляется с тем же страховщиком либо страхователь уходит в другую компанию. Более длительный период страхования встречается в личном страховании, но для данной отрасли применение различных систем страховой ответственности не совсем корректно в силу ее специфических особенностей. Таким образом, для имущественного страхования и страхования ответственности примем $T\in[0,1]$ в случае, когда договор заключен на срок менее одного года. В данной работе будем считать, что $\int_0^T \varphi(t)dt$ для какого-либо конкретного договора страхования есть некоторая постоянная величина. Рассмотрим более подробно различные варианты функций $f(x)$, $otv(x)$, а также изменяющиеся размеры предела ответственности страховщика.

Различные варианты законов распределения случайной величины ущерба $f(x)$ в сочетании с разнообразными вариантами распределения ответственности *otv*(*x*) дают интегралы, позволяющие определить размер возможных страховых возмещений независимо от момента наступления страхового случая. При рассмотрении систем страховой ответственности таких, как страхование по системе "первого риска", страхование с франшизой, страхование предельных рисков, при определении *M*(*Y*|*A*) появляется интеграл с переменным верхним или нижним пределом в зависимости от конкретной задачи[3].

В качестве законов распределения случайной величины ущерба рассмотрим экспоненциальный, нормальный и равномерный законы.

Таким образом для определения *M*(*Y*|*A*) в случае страхования по системе "первого риска" получили интегралы с переменным верхним и с переменным нижним пределом. Для случая экспоненциального распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (1) примет вид:

$$M(Y|A)=\Phi(C)+K=\lambda\int_0^C e^{-\lambda x}x\,dx+\lambda C\int_C^S e^{-\lambda x}\,dx. \quad (2)$$

Для наглядности изобразим графически (2) как ожидаемый ущерб страховщика, зависящий от величины страховой суммы *C*. Значение страховой суммы *C* будем варьировать от 0 до 10 и примем $\lambda = 0{,}4$.

Аналогично для нормального распределения (1) будет выглядеть следующим образом:

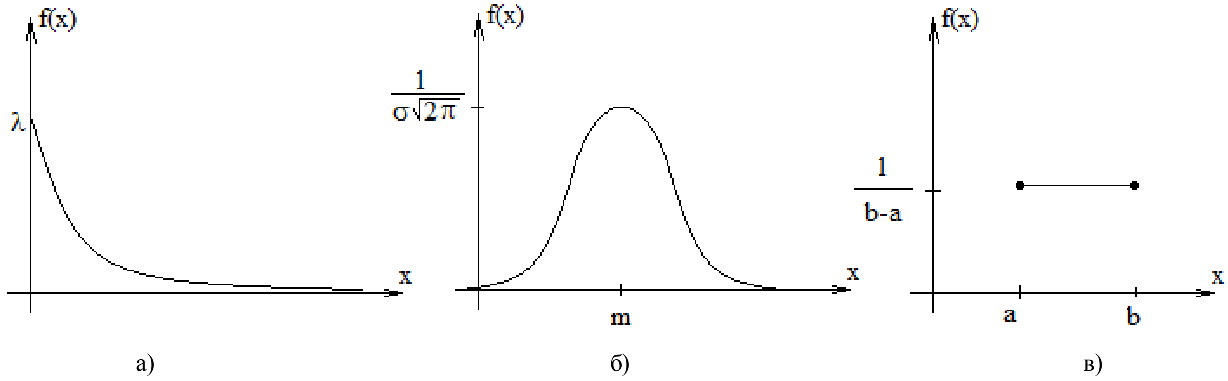

Рис. 1. **Плотности распределения вероятностей для экспоненциального (а), нормального (б) и равномерного (в) законов**

Источник. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Основы эконометрики : учеб. для вузов : в 2 т. 2-е изд., испр. Т. 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. М., 2001.

Графики плотности распределения (рис. 1) случайной величины размера ущерба от страхового случая иллюстрируют особенности застрахованного риска, связанные с величиной ущерба. Экспоненциальный закон характерен для страховых случаев, малый размер ущерба которых имеет высокую вероятность, и, наоборот, значительные ущербы маловероятны. Нормальный закон описывает страховые случаи, для которых малые и крупные ущербы имеют малую вероятность, а средние по величине ущербы наступают достаточно часто. Применение равномерного закона распределения вероятностей допустимо при описании страховых случаев, малый ущерб которых имеет низкую вероятность появления, а крупные ущербы наступают достаточно часто.

Для страхования по системе "первого риска", когда страховщик компенсирует в полном объеме ущерб, не превышающий указанную в договоре сумму, получаем следующее выражение, описывающее ожидаемый условный ущерб страховщика. Пусть предел ответственности страховщика равен *C*.

$$M(Y|A)=\Phi(C)+K=\int_0^C f(x)x\,dx+\int_C^S f(x)C\,dx. \quad (1)$$

$$M(Y|A)=\Phi(C)+K=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^C e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}x\,dx+C\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_C^S e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx. \quad (3)$$

Для нормального распределения возьмем параметры $m = 5$, $\sigma = 0{,}4$, страховую сумму также будем варьировать от 0 до 10 и построим график, отражающий зависимость ожидаемого ущерба страховщика от размера страховой суммы.

Равномерное распределение будем рассматривать в пределах максимального значения страховой суммы, которая также меняется от 0 до 10 для следующего выражения:

$$M(Y|A)=\Phi(C)+K=\frac{1}{S}\int_0^C x\,dx+\frac{1}{S}\int_C^S C\,dx. \quad (4)$$

Графики, иллюстрирующие зависимости (2) - (4), изобразим в одной системе координат, чтобы сравнить степень влияния размера предела ответственности страховщика на его ожидаемый ущерб.

Как видно из графика (рис. 2), для нормального распределения получаем наибольший ожидаемый ущерб страховщика, минимальный размер - при экспоненциальном распределении. Отчасти это объясняется выбранными парамет-

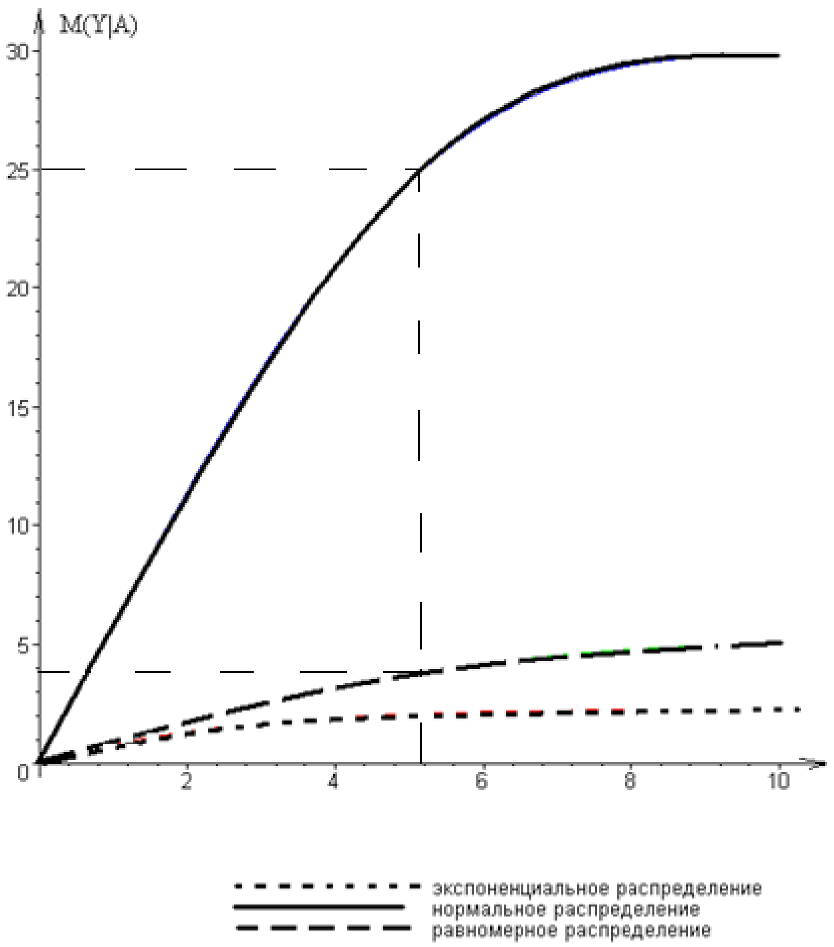

Рис. 2. **Зависимость ожидаемого ущерба страховщика от размера его ответственности при страховании “первого риска”**

рами, однако для других значений общая тенденция сохраняется. Также по полученному графику можно определить размер ожидаемого ущерба страховщика при известном уровне “первого риска”. Например, предел ответственности страховщика равен 5 усл. ед. Тогда при нормальном распределении ущерба от конкретного застрахованного риска ожидаемый ущерб страховщика $M(Y|A)$ будет равен 25 усл. ед., а при равномерном распределении - 4 усл. ед. С помощью полученных графиков можно также решать и обратную задачу: зная ожидаемый ущерб страховщика $M(Y|A)$, определить уровень “первого риска”. Допустим, известно, что ущерб от страхового случая распределен по нормальному закону распределения и страховщик может принять на страхование риск, для которого ожидаемый ущерб не превышает 25 усл. ед., тогда “первый риск” должен быть не более 5 усл. ед.

Рассмотрим далее случай с условной франшизой (рис. 3). Для него получаем следующее выражение:

$$M(Y|A)=\Phi(fr)=\int_{fr}^{S} f(x)x dx. \qquad (5)$$

Так же как и для (1) в (5), вместо $f(x)$ подставим выражение для плотности распределения вероятностей, соответствующих различным законам распределения случайной величины. Для случая экспоненциального распределения возьмем также $\lambda = 0{,}4$, франшизу будем изменять от 0 до 10. Для нормального распределения примем, как и раньше, $m = 5$, $\sigma = 0{,}4$, значение франшизы также будем изменять от 0 до 10. Для равномерного распределения так же, как и в случае со страхованием “первого риска”, случайная величина будет изменяться в пределах страховой стоимости. Значения параметров распределений случайной величины оставили такими же, как и для рассмотренной ситуации страхования по системе “первого риска” для того, чтобы результаты, полученные при различных системах распределения ответственности, можно было сравнить между собой, невзирая на разницу параметров.

Как и для случая “первого риска”, при условной франшизе максимальный размер ущерба соответствует нормальному распределению, а наименьший размер - экспоненциальному распределению.

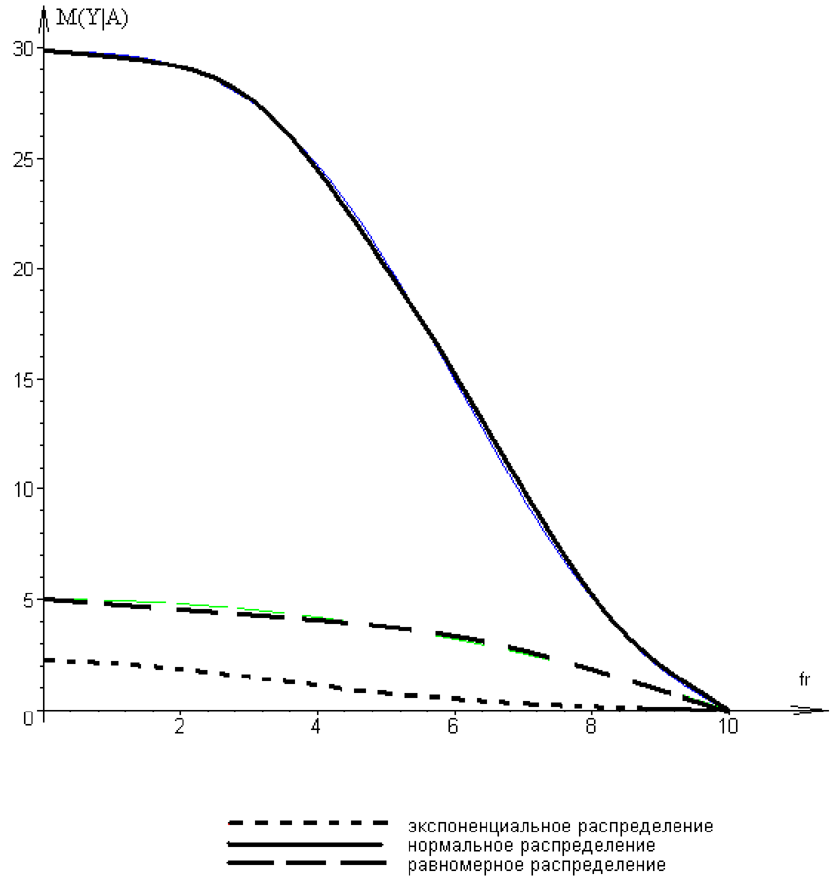

Рис. 3. **Зависимость ожидаемого ущерба страховщика от размера его ответственности при страховании с условной франшизой**

Проанализируем случай безусловной франшизы (рис. 4) и составим выражение для определения величины ожидаемого ущерба страховщика в виде интеграла с переменным нижним пределом:

$$M(Y|A)=\Phi(fr)=\int_{fr}^{S} f(x)(x-fr)dx. \qquad (6)$$

В качестве закона распределения величины ущерба от наступления страхового случая, как и для предыдущих вариантов систем страховой ответственности, рассмотрим экспоненциальное, нормальное и равномерное распределение случайной величины с теми же параметрами.

Для безусловной франшизы получили закономерность, аналогичную ситуации “первого риска” и условной франшизы. Ожидаемый ущерб страховщика, соответствующий нормальному распределению ущерба, дает наибольший результат по сравнению с экспоненциальным и равномерным распределениями.

Получили функции $\Phi(x)$, позволяющие определить размер ожидаемого ущерба страховщика, зависящие от уровня его ответственности. Различные варианты систем страховой ответственности дают интегралы либо с нижним, либо с верхним переменным пределом, значение которого зависит от порога ответственности страховщика. С помощью графиков и полученных формул можно определить либо уровень ожидаемого ущерба страховщика, либо предел его ответственности для различных систем страхования в зависимости от постановки задачи и исходных данных. Таким образом, зная функцию распределения случайной величины ущерба от страхового случая, можно решить одну из двух задач, результаты которых могут быть использованы при формировании договора страхования и определения устойчивости страховой компании. Для страхования по системе “первого риска” функция $M(Y|A)$ возрастает, поскольку при увеличении уровня ответственности страховщика увеличивается интервал значений ущерба, при котором страховщик участвует в выплате страхового возмещения. Для страхования с франшизой наблюдается обратная ситуация, что объясняется сужением диапазона значений ущерба от страхового случая при увеличении порога ответственности страховщика. Полученные результаты в виде общих формул (1), (5) и (6), частных результатов (2) - (4) и графиков (см. рис. 2 - 4)

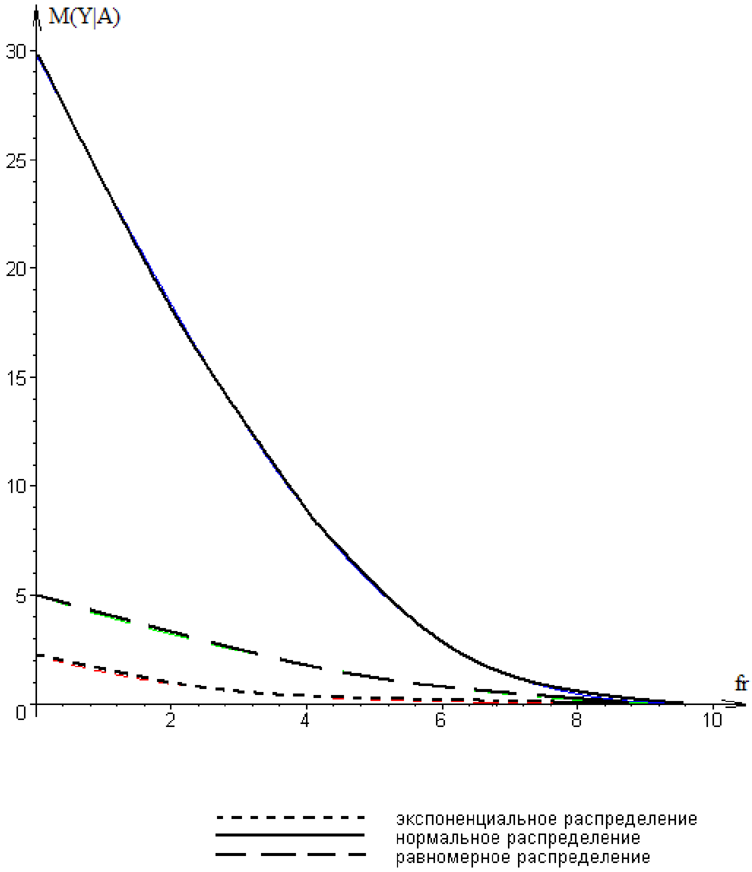

Рис. 4. **Зависимость ожидаемого ущерба страховщика от размера его ответственности при страховании с безусловной франшизой**

позволяют при известной функции распределения ущерба от страхового случая определить либо предел ответственности страховщика, максимально (минимально) допустимый в данном договоре страхования при известном требуемом уровне ожидаемого ущерба страховщика, либо на основе известного порога ответственности страховщика рассчитать ожидаемый ущерб, влияющий на устойчивость всего страхового портфеля.

[1] *Корнилов А.И.* Основы страховой математики : учеб. пособие для вузов. М., 2004.

[2] *Ростова Е.П.* Определение уровня собственного удержания страхователя для непропорционального страхования // Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Сочи, 3 - 9 мая 2012 г. Сочи, 2012. С. 68 - 69.

[3] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб., 2009.

Поступила в редакцию 05.10.2012 г.