Моделирование механизма взаимодействия в системах с фиксированной последовательностью ходов

© 2011 Д.Г. Гришанов
доктор экономических наук, профессор
© 2011 А.Д. Гришанова
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)
© 2011 М.И. Кулинкович
ФГУП ГНПРЦ "ЦСКБ-Прогресс"
© 2011 К.А. Татаринова
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)
E-mail: grishanov-sgau@mail.ru

В статье рассмотрены задачи выбора конкурентных стратегий Штакельберга, определено требование к начальной цене, как функции от конкурентоспособности, выполнение которого обеспечивает устойчивость конкурентной среды. Осуществлена оценка параметрической устойчивости механизма взаимодействия между центром и агентами, сформированы требования к его параметрам, позволяющие выбрать и реализовать стратегии, направленные на повышение эффективности деятельности фирм, функционирующих в рыночных условиях.

Ключевые слова: конкурентные стратегии Штакельберга, начальная цена, функция от конкурентоспособности параметрическая устойчивость, механизм взаимодействия между центром и агентами.

Рассмотрим стратегию Штакельберга по выбору объемов при параметрически заданных целевых функциях агентов, функций спроса и затрат, обратной функциям спроса. Предположим, что функции спроса и функции затрат определяются для каждого участника из следующих уравнений:

$$q_i(p) = q_{0i} - a_i p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} k_{ij} p_j, i,j = \overline{1,n};\ i \neq j$$

$$z_i(q_i) = c_i \cdot q_i(p), i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

где q_{0i} - емкость рынка i-го предприятия,

$a_i > 0, k_{ij} > 0, i,j = \overline{1,n};\ i \neq j$ - коэффициенты чувствительности функции спроса к изменению цен $p_1, \dots, p_n$;

c_i - валовые удельные затраты.

Если фирмы выбирают стратегию Штакельберга, то в работе В.А. Коршунова получена следующая система уравнений для определения равновесных объемов выпуска при $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = -\frac{1}{n}, i,j = \overline{1,n}, i \neq j$:

$$q_i^0(c) = \frac{\left[p_0 - (n^2+1)c_i + n\sum_{j=1}^{n} c_j\right] n}{b(n^2+1)}, i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Величина $КП_i = p_0 - (n^2+1)c_i + n\sum_{j=1}^{n} c_j$ в квадратных скобках числителя характеризует конкурентный потенциал i-й фирмы, определяющий ее позицию на рынке[1]. Определим равновесные объемы каждой фирмы как функции от уровня конкурентоспособности по затратам. Для этого преобразуем каждое уравнение системы (2) к следующему виду:

$$q_i^0(r_i) = \frac{\{p_0 - c_i[(n^2+1) + n(r_i+1)]\} n}{b(n^2+1)}, i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

где $r_i = \sum_{j\neq i}^{n-1} \frac{c_j}{c_i}$ - конкурентоспособность i-й фирмы по удельным затратам.

Из уравнения (3) следует, что максимальная из начальных цен величина, определяемая из неравенства

$$p_0 \geq \max_i \{c_i[(n^2+1) + n(r_i+1)], i = \overline{1,n}\}, \qquad (4)$$

обеспечивает существование точки равновесия Нэша и рентабельность производства для всех конкурирующих фирм, каждая из которых выбирает стратегию Штакельберга[2].

При невыполнении неравенства (4) предприятия могут оказаться в различных ситуациях. Так, если

$$p_0 \le \min_i \{c_i[(n^2+1)+n(r_i+1)], i=1,n\},$$

то выпуск изделия в объеме q_0 становится нерентабельным для всех предприятий, и они прекращают свое существование. Если:

$$\min_i \{c_i[(n^2+1)+n(r_i+1)], i=1,n\} < p_0 <$$
$$< \max_i \{c_i[(n^2+1)+n(r_i+1)], i=1,n\}, \quad (5)$$

то рынок монополизируется, поскольку некоторым из предприятий производство становится невыгодным, и они уходит с рынка. Барьер входа в рынок по затратам для этих предприятий становится непреодолимым. В связи с этим строгое выполнение неравенства (5) обеспечивает рентабельность для каждого предприятия и сохранение конкурентной среды.

Суммарный равновесный объем выпуска продукции равен

$$Q = \frac{n\left[p_0 n - \sum_{j=1}^{n} c_j\right]}{b(n^2+1)}.$$

Равновесная цена и равновесная прибыль при выборе каждой фирмой стратегии Штакельберга определяются в соответствии с уравнениями:

$$p^0 = \frac{p_0 - n\sum_{j=1}^{n} c_j}{(n^2+1)},$$

$$\text{Пр}_i^0 = \frac{n\{p_0 - c_i[(n^2+1)+n(r_i+1)]\}^2}{b(n^2+1)^2}, i = 1,n.$$

Авторами изучены ситуации, в которых некоторые из участников рынка принимают стратегии Курно, а другие - Штакельберга, и сформированы аналитические условия на параметры механизма взаимодействия, обеспечивающего устойчивость и рентабельность производства.

Таким образом, в работе рассмотрена объемная конкуренция, возникающая при выпуске однотипной продукции, и определены условия, при выполнении которых рынок сбыта или монополизируется, или ликвидируется, или сохраняется в условиях, когда фирмы выбирают стратегию Штакельберга.

В решении задач управления крупным промышленным комплексом большой интерес представляют модели взаимодействия в иерархических системах. Простейшей моделью является система, состоящая из центра и агентов, при этом каждый из субъектов обладает свойством активности. В большинстве моделей управления считается, что роль центра заключается в осуществлении управления (координации), т.е. у него отсутствует собственный результат деятельности, поэтому результатом деятельности центра считается результат деятельности агентов. При выборе управления центр должен руководствоваться следующими принципами. Во-первых, управление должно быть согласовано с интересами агентов, а это означает, что выбор действий агентами при заданном со стороны центра управлении должен максимизировать их целевые функции. Во-вторых, условия согласованности должно выполняться и для центра, т.е. центру должно быть выгодно стимулировать агентов, если эффект от управления превосходит величину затрат на его реализацию.

В работе осуществлена оценка параметрической устойчивости механизма взаимодействия между центром и агентами, сформированы требования к его параметрам, позволяющие выбрать и реализовать стратегии, направленные на повышение эффективности деятельности фирм, функционирующих в рыночных условиях.

Рассмотрена задача оптимизации управлений в иерархической системе (синтез оптимальных процедур управления). Пусть на множестве оптимальных для агентов состояний

$$y = P(u,f) = \left\{P_i(u_i,f_i) = Arg \max_{y_i \in Y_i} f_i(u_i,y_i), i \in I\right\}$$

строится гарантированная оценка значений целевой функции центра $\min_{y \in P(u,f)} \Phi(u,y)$, которая понимается как значение критерия эффективности фирмы в целом. В литературе значительное внимание исследователей было сосредоточено на задаче выбора управлений центра $u \in U$ в форме программы (задача Γ_1)

$$\max_{u \in U} \min_{y \in P(u,f)} \Phi(u,y)$$

и на задаче выбора управлений центра $u(y) \in U$ в форме синтеза, как функция от выбора состояний агентами (задача Γ_2)

$$\max_{u(y) \in U} \min_{y \in P(u(y),f)} \Phi(u(y),y).$$

Предложенные методы решения задачи Γ_1 основывались на использовании необходимых условий оптимальности, с применением штрафных стимулирующих функций (Ю.Б. Гермеер, В.А. Горелик, В.Н. Бурков, Д.А. Новиков и др.). Определение решений задачи Γ_2 основывалось на сведении их к последовательности решения задач типа Γ_1 и традиционных задач оптимизации в зависимости от гипотез об информированности центра и агентов о выбираемых стратегиях.

Рассмотрена следующая модель иерархической системы (ИС), состоящей из одного управляющего органа - центра - и множества $N = \{1,2,\dots,n\}$, состоящего из n управляемых субъектов-агентов. Каждый агент выбирает свое действие. Действие i-го агента обозначим $y_i \in A_i, i \in N$.

Целевая функция i-го агента $f_i(y,u,r_i)$ зависит от вектора $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ действий всех агентов, где $y\in A`=\prod_{i\in N}A_i$, от управления $u\in U$, выбираемого центром, и от параметра $r_i\in\Omega_i$ - типа i-го агента, $i\in N$. Будем считать, что вектор типов агентов $r=(r_1,r_2,\dots,r_n)$ принадлежит множеству $\Omega=\prod_{i\in N}\Omega_i$.

Механизм взаимодействия агентов описывается кортежем $\Gamma=(N,\{A_i\}_{i\in N},\{f_i(\cdot)\}_{i\in N},u\in U,r\in\Omega)$. Предполагая, что Г является общим знанием среди агентов и центра, при фиксированных значениях управления $u\in U$ со стороны центра и параметра $r\in\Omega$ в качестве решения этой игры выберем множество равновесий Нэша:

$$E_N(u,r)=\{x\in A`|\forall i\in N,\forall y_i\in A_i,f_i(y,u,r_i)\geq f_i(x_{-i},y_i,u,r_i)\},\quad(6)$$

где $x_{-i}=(x_1,x_2,\dots,x_{-i},x_{i+1},\dots,x_n)\in A_{-i}=\prod_{j\neq i}A_i$ - обстановка для i-го агента.

Если центр разыгрывает игру Γ_2, назначая управление $u=w(y)$, то множество равновесий Нэша примет вид

$$E_N(w(\cdot),r)=\{x\in A`|\forall i\in N,\forall y_i\in A_i,f_i(x,w(\cdot),r_i)\geq f_i(x_{-i},y_i,w(x_{-i},y_i),r_i)\}.\quad(7)$$

Пусть задана целевая функция центра $\Phi(y,u)$. Тогда задача управления примет вид

$$\min_{y\in E_N(u,r)}\Phi(y,u)\to\max_{u\in U},\quad(8)$$

т.е. будет заключаться в выборе центром такого допустимого управления, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что агенты при заданном управлении выбирают действия, являющиеся равновесием Нэша их игры при данном управлении.

В случае, если $u=w(y)$, то задача управления формулируется аналогично (8).

Постановке и решению задач управления вида (8) посвящено множество работ как для одноэлементных, так и для многоэлементных организационных систем.

Рассмотрим модель, описывающую совместную деятельность агентов. Модель основывается на предположении о том, что агенты выбирают равновесные по Нэшу действия, приводящие к требуемому центру результат их деятельности с минимальными затратами центра на управление.

Пусть целевые функции агентов аддитивны по управлению:

$$f_i(y,u,r_i)=v_i(y,r_i)+u_i,i\in N.$$

Предположим, что центр использует управление следующего вида:

$$w_{0i}(x_z,z)=\begin{cases}\sigma_i,z=x_z\\0,z\neq x_z\end{cases},\quad(9)$$

где $z=Q(y)$ - результат деятельности агентов, $x_z,z\in A_0$.

Тогда множество равновесий Нэша игры агентов при заданном управлении (1) примет вид

$$\forall i\in N,\forall y_i\in A_i\ v_i(x,r_i)+\sigma_i\geq v_i(x_{-i},y_i,r_i).$$

Отсюда получаем, что $\sigma_i\geq\Delta_i(x_i,r_i)$,

где $\Delta_i(x_i,r_i)=\max\limits_{y_i\in A_i}v_i(x_{-i},y_i,r_i)-v_i(x,r_i),i\in N.$

Разность $\Delta_i(x_i,r_i)$ характеризует потери i-го агента при реализации задания центра x. Центр минимизирует суммарное вознаграждение агентов, побуждающее их выбрать как равновесие действия, приводящие к результату $z\in A_0$:

$$\Delta(z,r)=\min_{x\in Y(z)}\sum_{i\in N}\Delta_i(x,r_i).\quad(10)$$

Обозначим

$$x^*(z,r)=\arg\min_{x\in Y(z)}\sum_{i\in N}\Delta_i(x,r_i).$$

Утверждение. При использовании управления

$$w_{0i}(x_z,z,r)=f(x)=\begin{cases}\Delta_i(x^*(x_z,r),r_i),z=x_z\\0,z\neq x_z\end{cases},i\in N\quad(11)$$

вектор действий $x^*(x_z,r)$ является равновесием Нэша игры агентов. Суммарное вознаграждение агентов со стороны центра, равное $\Delta(x_z,r)$, является минимально возможным среди всех управлений, реализующих результат $x_z\in A_0$.

Рассмотрим иерархическую систему, состоящую из центра и двух агентов. Целевая функция каждого агента параметрически задана и определяется разностью между величиной стимулирования за результаты деятельности каждого агента и его затратами

$$f_i(y,u,r_i)=uy_i-\frac{y_i^2}{2(r_i+\alpha y_j)},i,j=1,2,i\neq j,\quad(12)$$

где α - коэффициент взаимовлияния между агентами.

Как следует из приведенной формулы, взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат каждого из них от действий другого агента. Знак “+” в знаменателе формулы затрат соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) - чем больше действия выбирает другой агент, тем меньше затраты и выше эффективность деятельности рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т.д.

Целевая функция центра представляет собой разность между доходом от совместной деятельности и затратами на стимулирование агентов:

$$\Phi(y,u)=(p-u)(y_1+y_2).\quad(13)$$

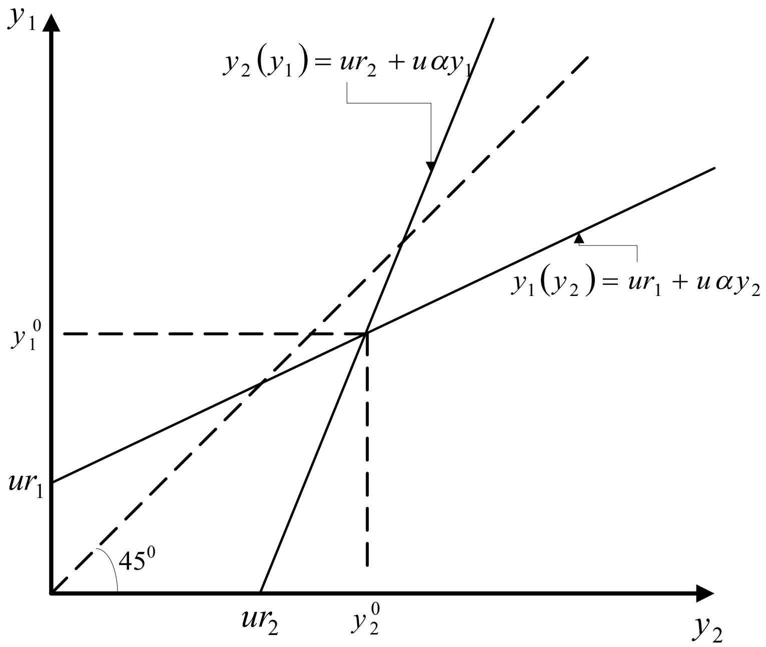

Рис. **Графическое решение задачи определения равновесных объемов выпуска изделий**

Определим равновесные по Нэшу объемы выпускаемой продукции и оптимальную величину управления, обеспечивающего устойчивость механизма взаимодействия между агентами и центром.

Дифференцируя (13) по y_1 и y_2, получим следующую взаимосвязанную систему оптимальных значений действий каждого агента:

$$\begin{cases} y_1(y_2) = ur_1 + u\alpha y_2 \\ y_2(y_1) = ur_2 + u\alpha y_1 \end{cases}. \tag{14}$$

Каждое из этих уравнений характеризует реакцию агента на выбранное действие другим агентом. В результате решения системы (14) получим следующие значения равновесных по Нэшу объемов выпуска продукции каждым агентом:

$$y_1^0 = \frac{ur_1 + u^2\alpha r_2}{1 - \alpha^2 u^2}, y_2^0 = \frac{ur_2 + u^2\alpha r_1}{1 - \alpha^2 u^2}. \tag{15}$$

Из полученных уравнений следует, что равновесие Нэша существует ($y_1^0 > 0$ и $y_2^0 > 0$), если разность $(1 - \alpha^2 u^2) > 0$. Из этого неравенства получаем, что управление должно удовлетворять неравенству $u < \frac{1}{\alpha}$. На рисунке представлено графическое решение задачи определения равновесных по Нэшу объемов выпуска продукции.

На графике показаны прямые реакции агентов $y_1(y_2)$ и $y_2(y_1)$ системы уравнений (14). Из графика и уравнений системы (14) следует, что если угол наклона прямой $y_1(y_2)$ к оси $0y_2$ и угол наклона прямой $y_2(y_1)$ к оси $0y_1$, определяемый величиной $u\alpha$, меньше, соответственно, 45^0, то прямые реакций агентов пересекаются, а это означает, что равновесие Нэша существует.

Для определения оптимальных стимулирующих воздействий со стороны центра определено оптимальное значение его целевой функции. Подставляя (15) в (13), получим, что

$$\Phi(y^0, u) = \frac{(p - u)}{1 - \alpha u}(r_1 + r_2). \tag{16}$$

Дифференцируя полученное уравнение по *u*, находим, что $u^0 = \frac{(1 - \sqrt{1 - \alpha p})}{\alpha}$.

Полученные результаты исследований задач выбора механизмов взаимодействия, согласованных с позиции целей центра и агентов, имеют важное практическое значение.

---

[1] Внутрифирменные механизмы бюджетного управления крупным промышленным комплексом по производству ресурсоемких изделий / Д.Г. Гришанов [и др.]. Самара, 2009.

[2] Модели формирования механизмов стимулирования и бюджетирования деятельности предприятий: монография / В.В. Альтергот [и др.]. Самара, 2009.

Поступила в редакцию 03.11.2011 г.