# Параметрический анализ применимости современных теорий управления портфелем для инвестирования средств пенсионных накоплений

© 2011 Д.М. Корчагин
Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева
E-mail: Korchagin@gasinv.ru

В статье рассмотрены ключевые положения портфельной теории Марковица и критически оценена возможность ее применения для управления портфелем пенсионных накоплений. Детально разобран алгоритм формирования портфеля в соответствии с методикой Блэка - Литтермана. Сделан вывод, что использование данной модели позволит управляющей компании улучшить инвестиционные характеристики портфеля пенсионных накоплений.

*Ключевые слова:* пенсионные накопления, формирование оптимального инвестиционного портфеля, современная портфельная теория, модель Блэка - Литтермана.

Относительно недавно на российском рынке доверительного управления активами появился новый сегмент - инвестирование средств для финансирования накопительной части пенсии. Пенсионные накопления по своей сути являются “длинными” консервативными инвестиционными ресурсами, следовательно, инвестиционная стратегия управляющей компании (УК) должна быть ориентирована на достижение доходности, превышающей уровень инфляции, на длительном горизонте инвестирования. Учитывая огромную социальную значимость данных средств, риск портфеля необходимо свести к минимуму при условии обеспечения заданной доходности.

Для оптимального управления портфелем пенсионных накоплений УК должна использовать теоретически обоснованные методики, базирующиеся на применении современных портфельных теорий. В соответствии со специфическими целями и функциями пенсионных накоплений применяемые теории управления портфелем должны оцениваться по следующим критериям:

- вторичность показателей доходности портфеля по отношению к параметрам риска;
- высокая диверсификация портфеля для обеспечения сохранности средств;
- обеспечение высокой ликвидности вложений;
- снижение до минимума необходимости ребалансировки портфеля при изменении рыночной конъюнктуры.

Проанализируем возможность применения различных портфельных теорий для управления пенсионными накоплениями. Так, современная портфельная теория (теория Марковица) исходит из следующих положений:

- доходность некоторого актива является случайной величиной, распределенной по нормальному закону;
- в качестве будущей доходности актива принимается его математическое ожидание;
- мерой риска актива является среднеквадратическое отклонение доходности случайной величины от ее математического ожидания - чем больше колебания доходности актива, тем выше инвестиционный риск;
- величина капитала равна 1 и распределена между $n$ активами портфеля.

Соответственно, при формировании инвестиционного портфеля необходимо оценивать лишь два показателя: $E(r)$ - математическое ожидание доходности актива и $\sigma$ - стандартное отклонение (дисперсию) как меру риска (так как именно эти два показателя определяют плотность вероятности случайных чисел при нормальном распределении).

При управлении портфелем пенсионных накоплений УК исходит из приоритетности уменьшения риска портфеля над увеличением его доходности. Задача оптимизации портфеля для УК формулируется следующим образом: это нахождение вектора распределения капитала ($X$) по $n$ финансовым активам, который минимизирует риск формируемого портфеля при обеспечении доходности, превышающей уровень инфляции.

$$\begin{cases} w^T = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle; \\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot K_{ij} \ \rightarrow \ \min; \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i >= r_p, \end{cases}$$

где $w$ - вектор долей активов в оптимальном портфеле;

$x_i$ - доля капитала, вложенного в $i$-й актив;

$\sigma_p^2$ - риск портфеля;

$r_p$ - заданная доходность портфеля (уровень инфляции);

$r_i$ - математическое ожидание доходности $i$-го актива;

$K_{ij}$ - ковариация между доходностями $i$-го и $j$-го активов;

$n$ - количество активов в портфеле.

В отсутствие ограничений решением данной оптимизационной задачи будет являться следующий вектор весов активов в оптимальном портфеле:

$$w = \Pi(\lambda\Sigma)^{-1},$$

где $\Pi$ - вектор будущих доходностей активов (математические ожидания их доходностей);

$\lambda$ - коэффициент неприятия риска;

$\Sigma$ - матрица ковариаций доходностей.

Таким образом, современная портфельная теория представляет собой методику построения оптимального портфеля ценных бумаг на основе теоретико-вероятностной формализации понятий доходности и риска, т.е. позволяет перевести проблему оптимального распределения средств между активами в сферу теории вероятности и применить математические методы для решения этой задачи. Однако большинство УК приходит к выводу, что применение данной модели для определения оптимальной структуры портфеля пенсионных накоплений нецелесообразно по следующим причинам:

- во-первых, из-за чрезмерно высокой чувствительности структуры портфеля к исходным данным. Портфели получаются крайне нестабильными - даже незначительное изменение экономической ситуации часто требует ребалансировки большей части портфеля в относительно короткие сроки. В случае управления крупным портфелем пенсионных накоплений это может оказаться крайне затруднительным или вообще неприемлемым;
- во-вторых, при оптимизации по Марковицу веса активов получаются экстремальными, т.е. слишком большая доля подлежит вложению в тот или иной финансовый актив, а следовательно, полученные на основе модели портфели отличаются слабой диверсификацией.

Рассмотрим модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг, разработанную Фишером Блэком и Робертом Литтерманом. Модель Блэка - Литтермана позволяет устранить ключевые недостатки современной портфельной теории, а также дает возможность УК ввести в модель собственные прогнозы доходности активов.

В основе теории Блэка - Литтермана лежит алгоритм нахождения оптимального портфеля по Марковицу, однако вместо вектора доходности, основанного на математическом ожидании, используется комбинированный вектор доходности. В общем виде данный вектор представляет собой комплексное взвешенное среднее вектора равновесных доходностей активов ($\Pi$) и вектора прогнозных доходностей ($Q$). Формула для расчета комбинированного вектора доходностей активов ($E[R]$), основанная на применении метода Байеса, известна как формула Блэка - Литтермана:

$$E[R] = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q\right],$$

где $K$ - количество прогнозов;

$N$ - количество активов;

($E[R]$) - комбинированный вектор доходностей (Nx1 вектор);

$\Pi$ - вектор равновесных ожидаемых доходностей (Nx1 вектор);

$Q$ - вектор прогнозируемых доходностей (Kx1 вектор);

$\Sigma$ - матрица ковариации доходностей (NxN матрица);

$\Omega$ - ковариационная матрица, выражающая неуверенность в прогнозе (KxK матрица);

$P$ - матрица, идентифицирующая активы, представленные в прогнозах (KxN матрица);

$\tau$ - скалярная величина.

Рассмотрим этапы построения оптимального портфеля по методике Блэка - Литтермана. Отправной точкой оптимизации является вектор доходностей активов в состоянии рыночного равновесия ($\Pi$). Рыночный портфель - это портфель, состоящий из всех доступных активов в долях, пропорциональных их рыночной капитализации.

$$w_{i\,mkt} = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i},$$

где $w_{i\,mkt}$ - вес $i$-го актива в рыночном портфеле;

$k_i$ - капитализация $i$-го актива;

$\sum_{i=1}^{n} k_i$ - суммарная капитализация активов;

$n$ - количество доступных активов.

Вектор доходностей активов в состоянии рыночного равновесия вычисляется решением задачи обратной оптимизации.

$$\Pi = \lambda\Sigma w_{mkt},$$

где $\Pi$ - вектор ожидаемых равновесных доходностей;

$\Sigma$ - матрица ковариации доходностей;

$w_{mkt}$ - вектор рыночных весов капитализации активов;

$\lambda$ - коэффициент склонности инвестора к риску. Характеризует готовность инвестора жертвовать ожидаемой доходностью портфеля ради снижения его риска.

На данный вектор впоследствии “накладывается” вектор прогнозных доходностей. В случае, если прогноз доходности активов не задан, модель предлагает формировать рыночный портфель.

Прогноз доходности активов является ключевым параметром в модели Блэка - Литтермана. Прогноз “накладывается” на ожидаемую доходность активов в состоянии рыночного равновесия. В случае, если прогнозируемая доходность актива выше равновесной, доля данного актива в портфеле будет увеличена, и наоборот, если прогнозируемая доходность ниже равновесной, модель придаст данному активу меньший вес.

$$Q+\varepsilon=\begin{bmatrix}Q_1\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_k\end{bmatrix}.$$

Прогноз выражается в виде вектора-столбца ($Q$) размерностью ($K$x1), элементами которого являются прогнозируемые значения доходности активов. Неуверенность в прогнозе выражена в виде случайного нормально-распределенного вектора погрешности ($\varepsilon$) с математическим ожиданием 0 и ковариационной матрицей $\Omega$. Таким образом, прогноз в модели представлен в форме $Q+\varepsilon$.

За исключением гипотетического случая, когда инвестор на 100 % уверен в своем прогнозе, погрешность является некоторой (отличной от нуля) величиной. Чем больше уверенность в точности прогноза, тем ближе комбинированный вектор доходности будет к вектору прогнозных значений, и, наоборот, если инвестор не уверен в своем прогнозе, полученный результат будет ближе к вектору равновесной доходности.

Вектор погрешности ($\varepsilon$) непосредственно не входит в формулу Блэка - Литтермана, однако в формуле содержится дисперсия погрешности ($\omega$) в составе ковариационной матрицы погрешности прогнозов ($\Omega$). Матрица $\Omega$ является диагональной, так как предполагается, что прогнозы независимы друг от друга. Диагональные элементы матрицы составляют значения дисперсии погрешностей прогнозов. Дисперсия погрешности ($\omega$) выражает неуверенность в прогнозе: чем больше уверенность в прогнозе, тем меньше значение ($\omega$).

Вычислить дисперсию погрешности прогноза ($\omega$) можно задав предельную величину отклонения доходности актива от своего прогнозируемого значения и вероятность попадания в этот интервал, пользуясь следующим выражением:

$$\Omega=\begin{bmatrix}\omega_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \omega_k\end{bmatrix}.$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины $X$ от своего математического ожидания на величину $\delta$:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}),$$

где $\sigma$ - дисперсия случайной величины.

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$ - функция Лапласа.

Прогнозы ставятся в соответствие определенному активу посредством идентификационной матрицы $P$. В матрице $P$ каждому прогнозу соответствует вектор-строка (1x$N$). Активу, по которому выдвинут прогноз, присваивается значение 1, всем остальным активам - 0. Таким образом, $K$ прогнозов формируют матрицу размера $K$x$N$.

$$P=\begin{bmatrix}P_{1,1}\dots P_{1,n}\\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots\\ P_{k,1}\dots P_{k,n}\end{bmatrix}.$$

Объединенный вектор доходности представляет собой средневзвешенное соотношение вектора равновесной доходности ($\Pi$) и вектора прогнозных доходностей ($Q$), масштабирующим фактором в котором выступает скаляр тау ($\tau$). Большинство исследователей задавали величину $\tau$ близкой к нулю, руководствуясь тем, что погрешность исходного вектора существенно меньше погрешности прогноза.

В общем виде процесс формирования портфеля по модели Блэка - Литтермана изображен на следующей схеме (см. рисунок).

Нахождение оптимального портфеля при наличии ограничений является более сложной задачей. Однако сам алгоритм остается без изменений: сначала строится объединенный вектор доходности активов, а затем используется среднедисперсионный подход к решению задачи оптимизации в условиях наложения ограничений:

$$\begin{cases}E[R]=\left[(\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P^T\Omega^{-1}Q\right]\to\max\\ \sigma^2=w^T\left[\Sigma+\left((\tau\Sigma)^{-1}\right)+P^T\,\Omega^{-1}\,P)^{-1}\right]w\to\min\\ \text{ограничения.}\end{cases}$$

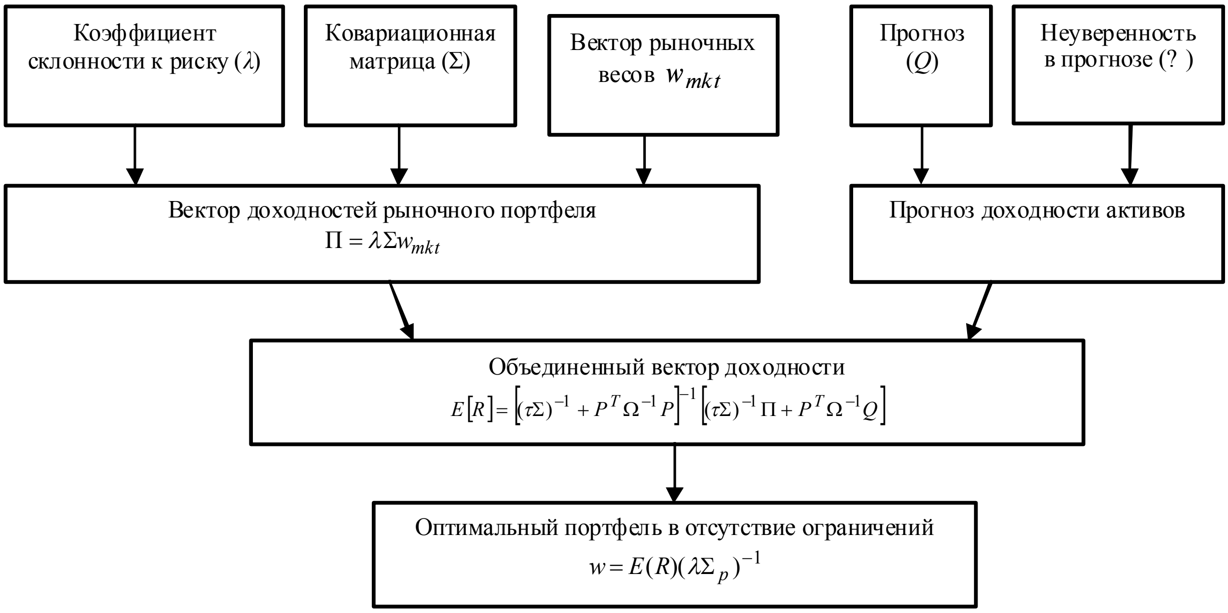


***Рис.* Схема процесса формирования портфеля по модели Блэка - Литтермана**

Использование модели Блэка - Литтермана для управления портфелем пенсионных накоплений позволит УК:

- учитывать при формировании портфеля собственные прогнозы будущей динамики рынка и трансформировать их в обоснованные инвестиционные решения;
- более эффективно решать поставленные задачи и оперативно реагировать на изменения экономической конъюнктуры финансовых рынков;
- получать высокую отдачу от находящихся под управлением средств без ущерба для сохранности и ликвидности сбережений.

Таким образом, можно сделать вывод, что применение методики Блэка - Литтермана даст возможность УК реализовать свое конкурентное преимущество путем достижения относительно высокой доходности инвестиций без увеличения риска и минимальной необходимости ребалансировки портфеля за счет введения в модель прогнозов собственного аналитического подразделения.

1. *Говшвань О.Дж.* Финансирование инвестиций, инфляция, риски и страхование // Проблемы прогнозирования. 2008. № 6. С. 15-29.

2. *Шведов А.С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М., 2008.

3. *Буренин А.Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов: учеб. пособие. М., 2005.

4. *Карпиков Е.И., Федоров А.А.* Основные постулаты классической теории портфельных инвестиций. URL: http://www.mfc.ru/ecc/bulletin/002/inv-theor.html.

5. *Bevan A., Winkelmann K.* Using the Black - Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience // Fixed Income Research. Goldman, Sachs & Company. 1998. December.

6. *Black F., Litterman R.* Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium // Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company. 1990. September.

7. *Black F., Litterman R.* Global Portfolio Optimization // Financial Analysts J. 1992. September/October. P. 28-43.

8. *He G., Litterman R.* The Intuition Behind Black - Litterman Model Portfolios // Investment Management Research, Goldman, Sachs & Company. 1999. December.

9. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // The J. of Finance. 1952. March. P. 77-91.

10. *Satchell S., Scowcroft A.* A Demystification of the Black - Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction // J. of Asset Management. 2000. September. P. 138-150.

*Поступила в редакцию 04.06.2011 г.*