Математические модели принятия оптимальных решений участниками лизинговой сделки

© 2010 О.В. Павлов, Е.А. Фудобина
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: pavlov@ssau.ru, katt@land.ru

В статье формулируются математические модели принятия оптимальных решений лизингополучателем и лизингодателем. В качестве управления рассматриваются величины лизинговых платежей в каждом периоде. Задачи выбора траектории лизинговых платежей формулируются как задачи оптимального управления дискретными системами. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина определяются оптимальные управления платежами для лизингополучателя и лизингодателя. Решение поставленных задач позволило разработать методику по определению области компромисса, в которой должны находиться траектории лизинговых платежей. Для случая аннуитетных лизинговых платежей получены аналитические формулы, определяющие область компромисса для лизингополучателя и лизингодателя.

Ключевые слова: лизингополучатель, лизингодатель, оптимальное управление лизинговыми платежами, дискретная система, область компромисса, аннуитетные лизинговые платежи, аналитические формулы.

Введение

В результате заключения лизинговой сделки определяется сумма платежей, которые лизингополучатель выплачивает лизингодателю. У участников сделки существуют различные предпочтения по выбору управляющих параметров лизингового контракта, которые определяют сумму лизинговых платежей. В лизинговом контракте указываются условия заключения сделки: стоимость лизингового имущества K, величина аванса K_a, годовая процентная ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя i^*, общее количество лизинговых платежей n, количество лизинговых платежей в год m, величины платежей u_t в каждом периоде t, $t = 1, n$.

Рассматривается типичная ситуация, когда ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя начисляется на неоплаченную стоимость лизингового имущества в каждом периоде действия лизингового контракта[1]. В этом случае сумма лизинговых платежей является переменной величиной, зависящей от величины выплат в каждом периоде. В статье формулируются и решаются дискретные задачи оптимального управления лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя. Задачи выбора траектории лизинговых платежей формулируются как задачи оптимального управления дискретными системами. Решение поставленных задач необходимо для выбора параметров лизингового контракта, которые устраивают каждого участника.

1. Математические модели принятия оптимальных решений лизингополучателем и лизингодателем

Рассмотрим задачи управления лизинговыми платежами при фиксированном времени контракта с позиции лизингодателя и лизингополучателя. В этом случае общее количество периодов n лизингового контракта является фиксированным.

Экономические интересы лизингополучателя заключаются в минимизации дисконтированной суммы лизинговых платежей, что соответствует минимальному удорожанию стоимости лизингового имущества:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{u_t}{(1+r)^t} \to \min , \qquad (1)$$

где u_t - размер лизингового платежа, выгодный лизингополучателю в период t;
r - ставка дисконтирования;
n - количество лизинговых платежей.

Для достижения данной цели у лизингополучателя есть возможность выбора траектории лизинговых платежей: $u_1, u_1 \ldots u_n$. Величина платежа лизингополучателя ограничена его финансовыми возможностями и условиями контракта в рассматриваемый период:

$$b_t^{\min} \le u_t \le b_t^{\max} , \qquad (2)$$

где $b_t^{\min}$, $b_t^{\max}$ - соответственно, минимально и максимально возможные лизинговые платежи в период t.

Максимально возможный лизинговый платеж $b_t^{\max}$ определяется финансовым состоянием лизингополучателя. Минимально возможный платеж $b_t^{\min}$ должен быть больше, чем начисляемые проценты на неоплаченную стоимость лизингового имущества в этот период. В противном случае неоплаченная стоимость лизингового имущества будет возрастать.

Неоплаченная стоимость лизингового имущества x_t определяется дискретным уравнением

$$x_{t+1} = x_t(1+i) - u_t, \quad t = \overline{0,n}, \tag{3}$$

где i - процентная ставка комиссионного вознаграждения в период t.

Ставка комиссионного вознаграждения в период t вычисляется следующим образом:

$$i = \frac{i^*}{m},$$

где i^* - годовая процентная ставка комиссионного вознаграждения;

m - количество лизинговых платежей в год.

В начальный период неоплаченная стоимость лизингового имущества x_0 равна:

$$x_0 = K_0, \tag{4}$$

где K_0 - стоимость имущества после выплаты аванса.

Стоимость имущества после выплаты аванса определяется по формуле

$$K_0 = K - K_a.$$

Лизинговый контракт будет успешно выполнен, если в конечный период вся стоимость лизингового имущества будет выплачена:

$$x_n = 0. \tag{5}$$

Дискретные математические уравнения (1)-(5) являются моделью принятия решений для лизингополучателя. Управляющей функцией в этой модели являются лизинговые платежи $u_t, t = \overline{0,n}$, на которые наложено ограничение (2). Сформулированная задача управления лизинговыми платежами является задачей оптимального управления дискретной системой[2]. Задача оптимального управления состоит в нахождении такого управления u_t, подчиненного ограничению (2), которое переводит дискретную систему (3) из начального состояния (4) в конечное (5), минимизируя критерий оптимальности (1).

Стратегия лизингодателя заключается в максимизации дисконтированной суммы лизинговых платежей, что соответствует максимальному удорожанию стоимости лизингового имущества:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{v_t}{(1+r)^t} \to \max, \tag{6}$$

где v_t - размер лизингового платежа, выгодный лизингодателю в период t.

Величина платежа лизингодателя ограничена:

$$b_t^{\min} \le v_t \le b_t^{\max}. \tag{7}$$

Неоплаченная стоимость лизингового имущества x_t рассчитывается следующим образом:

$$x_{t+1} = x_t(1+i) - v_t, \quad t = \overline{0,n}. \tag{8}$$

Уравнения (4)-(5), (6)-(8) являются моделью принятия решений для лизингодателя. Задача оптимального управления для лизингодателя состоит в нахождении такого управления v_t, подчиненного ограничению (7), которое переводит дискретную систему (8) из начального состояния (4) в конечное (5), максимизируя критерий оптимальности (6).

2. Решение задач оптимального управления лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя

Решим задачу оптимального управления для лизингополучателя (1)-(5) с помощью принципа максимума Понтрягина[3]. Запишем гамильтониан

$$H_t = \Psi_{t+1}[x_t(1+i) - u_t] - \frac{u_t}{(1+r)^t} =$$

$$= -u_t[\Psi_{t+1} + \frac{1}{(1+r)^t}] + \Psi_{t+1} x_t (1+i). \tag{9}$$

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления для лизингополучателя:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & \text{если } \Psi_{t+1} + \dfrac{1}{(1+r)^t} \le 0 \\ b_t^{\min}, & \text{если } \Psi_{t+1} + \dfrac{1}{(1+r)^t} > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Запишем уравнение для сопряженной переменной:

$$\Psi_t = \frac{\partial H}{\partial x} = \Psi_{t+1}(1+i). \tag{11}$$

Следует отметить, что сопряженное уравнение решается независимо от исходного уравнения (3). Так как формула (11) является рекуррентной, можно вывести выражение для сопряженной переменной через параметры лизингового контракта. Запишем сопряженную переменную в периоды $t = 1, 2, \dots n$ по уравнению (11), считая, что в начальный период времени сопряженная переменная равна константе $\Psi_0 = C$:

$$\Psi_1 = \frac{\Psi_0}{1+i} = \frac{C}{1+i},$$

$$\Psi_2 = \frac{C}{(1+i)^2},$$

$$\Psi_3 = \frac{C}{(1+i)^3}.$$

Обобщая, запишем решение уравнения (11):

$$\Psi_{t+1} = \frac{C}{(1+i)^{t+1}}. \qquad (12)$$

С учетом (12) выражение для оптимального управления лизингополучателя примет вид

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & если \ \dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} + \dfrac{1}{(1+r)^t} \le 0 \\ b_t^{\min}, & если \dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} + \dfrac{1}{(1+r)^t} > 0 \end{cases}. \qquad (13)$$

Из условия (13) следует, что если константа C положительна, то оптимальным будет только одно управление $u_t^{opt} = b_t^{\min}$, а это не гарантирует в конечный момент времени выполнения граничного условия $x_n = 0$. В случае если константа C отрицательна, то условие $\dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} + \dfrac{1}{(1+r)^t}$ с увеличением периода t станет больше нуля и произойдет переключение управления с $u_t^{opt} = b_t^{\max}$ на $u_t^{opt} = b_t^{\min}$. В этом случае граничное условие будет выполнено. Следовательно, искомое оптимальное управление имеет релейный вид: на начальном этапе лизингового контракта до достижения периода переключения $t^*_{ЛП}$ лизингополучателю выгодно совершать лизинговые платежи как можно большего размера, а затем минимального размера:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & если \ 0 \le t \le t^*_{ЛП} \\ b_t^{\min}, & если \, t^*_{ЛП} < t \le n. \end{cases} \qquad (14)$$

Подставив в уравнение (3) оптимальное управление (14), используя граничные условия (4) и (5), возможно определить время переключения для лизингополучателя $t^*_{ЛП}$ в результате пересечения двух траекторий, выходящих из начальной и конечной точек.

Можно сделать следующий вывод для лизингополучателя: наилучшей будет схема выплат с убывающими лизинговыми платежами.

Аналогично решим задачу оптимального управления (4)-(5), (6)-(8) для лизингодателя. Запишем гамильтониан

$$H_t = \Psi_{t+1}[x_t(1+i) - v_t] + \frac{v_t}{(1+r)^t} =$$

$$= -v_t[\Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t}] + \Psi_{t+1} x_t (1+i). \qquad (15)$$

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления для лизингодателя:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & если \ \Psi_{t+1} - \dfrac{1}{(1+r)^t} \le 0 \\ b_t^{\min}, & если \ \Psi_{t+1} - \dfrac{1}{(1+r)^t} > 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Уравнение для сопряженной переменной запишется аналогично (11). Решение сопряженного уравнения имеет аналогичный вид (12). С учетом (12) выражение для оптимального управления лизингодателя:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & если \ \dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} - \dfrac{1}{(1+r)^t} \le 0 \\ b_t^{\min}, & если \dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} - \dfrac{1}{(1+r)^t} > 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Из условия (17) следует, что если константа C отрицательна, то оптимальным будет только одно управление $u_t^{opt} = b_t^{\max}$, а это не гарантирует в конечный момент времени выполнения граничного условия $x_n = 0$. В случае если константа C положительна, то условие $\dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} - \dfrac{1}{(1+r)^t}$ с увеличением периода t станет меньше нуля и произойдет переключение управления с $v_t^{opt} = b_t^{\min}$ на $v_t^{opt} = b_t^{\max}$. В этом случае граничное условие будет выполнено. Следовательно искомое оптимальное управление имеет релейный вид: на начальном этапе лизингового контракта до достижения периода переключения $t^*_{ЛД}$ лизингодателю выгодно совершенствовать лизинговые платежи как можно меньшей величины, а затем максимальной величины:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\min}, & если \ 0 \le t \le t^*_{ЛД} \\ b_t^{\max}, & если \, t^*_{ЛД} < t \le n. \end{cases} \qquad (18)$$

Подставив в уравнение (3) оптимальное управление (18), используя граничные условия (4) и (5), возможно определить время переключения для лизингодателя $t^*_{ЛД}$ в результате пересечения двух траекторий, выходящих из начальной и конечной точек.

Таким образом, можно сделать следующий вывод для лизингодателя: наилучшей будет схема выплат с возрастающими лизинговыми платежами. Полученные оптимальные стратегии лизингополучателя (14) и лизингодателя (18) определяют область компромисса, в котором должна находиться траектория невыплаченной стоимости лизингового имущества.

3. Определение области компромисса в случае аннуитетных лизинговых платежей

В случае аннуитетных лизинговых платежей оптимальное управление для лизингополучателя запишется так:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b^{\max}, & если\ 0 \le t \le t^*_{ЛП} \\ b^{\min}, & если\ t^*_{ЛП} < t \le n. \end{cases} \qquad (19)$$

Начальным периодам $0 \le t \le t^*_{ЛП}$, в которых постоянные лизинговые платежи лизингополучателя максимальны $u_t^{opt} = b^{\max}$, соответствует траектория, определяемая дискретным уравнением (3):

$$x_{t+1} = x_t(1+i) - b^{\max}, \quad t = 0, t^*_{ЛП}. \qquad (20)$$

Так как формула (20) является рекуррентной, можно вывести выражение для неоплаченной стоимости лизингового имущества x_{t+1} через параметры лизингового контракта. Запишем неоплаченную стоимость лизингового имущества в периоды $t = 0,1,2,3,...\ t^*_{ЛП}$ по уравнению (20), используя начальное условие (4):

$$x_1 = K_0(1+i) - b^{\max},$$

$$x_2 = K_0(1+i)^2 - b^{\max}\left[(1+i) - 1\right],$$

$$x_3 = K_0(1+i)^3 - b^{\max}\left[(1+i)^2 - (1+i) - 1\right],$$

$$x_4 = K_0(1+i)^4 - b^{\max}\left[(1+i)^3 - (1+i)^2 - (1+i) - 1\right].$$

Обобщая, можем записать выражение для произвольного периода t:

$$x_t = K_0(1+i)^t - b^{\max}\left[(1+i)^{t-1} - (1+i)^{t-2} - \right.$$
$$\left. - (1+i)^{t-3} - \ldots - (1+i)^0\right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $(1+i)$ и числом членов прогрессии t. Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим следующее выражение для неоплаченной стоимости лизингового имущества:

$$x_t = K_0(1+i)^t - b^{\max}\frac{(1+i)^t - 1}{i}. \qquad (21)$$

Формула (21) определяет семейство прямых, выходящих из точки с координатами $(0, K_0)$. Конечным периодам $t^*_{ЛП} < t \le n$, в которых постоянные лизинговые платежи лизингополучателя минимальны $u_t^{opt} = b^{\min}$, соответствует траектория:

$$x_t = \frac{x_{t+1} + b^{\min}}{1+i}, \quad t = n, t^*_{ЛП} \qquad (22)$$

Выведем выражение для неоплаченной стоимости лизингового имущества x_t через параметры лизингового контракта. Запишем неоплаченную стоимость лизингового имущества в периоды $t = n, n\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}3, \ldots\ t^*_{ЛП}$ по уравнению (22), используя конечное условие (5):

$$x_{n-1} = b^{\min}\frac{1}{1+i},$$

$$x_{n-1} = b^{\min}\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2}\right],$$

$$x_{n-2} = b^{\min}\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3}\right].$$

Для произвольного периода t выражение запишется:

$$x_t = b^{\min}\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-t}}\right].$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{1+i}$ и числом членов прогрессии $n\text{-}t$. Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим следующее выражение для неоплаченной стоимости лизингового имущества:

$$x_t = b^{\min}\left[\frac{1-(1+i)^{t-n}}{i}\right]. \qquad (23)$$

Формула (22) определяет семейство прямых, выходящих из точки с координатами $(n,0)$. Время переключения управления $t^*_{ЛП}$ определится в результате пересечения начального и конечного участков траекторий. Приравнивая уравнения (20) и (22), найдем время переключения для лизингополучателя:

$$t^*_{ЛП} = \log_{1+i}\left[\frac{b^{\max} - b^{\min}}{b^{\max} - K_0 i - b^{\min}(1+i)^{-n}}\right]. \qquad (24)$$

Оптимальное управление для лизингодателя в случае постоянных лизинговых платежей запишется:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b^{\min}, & если\ 0 \le t \le t^*_{ЛД} \\ b^{\max}, & если\ t^*_{ЛД} < t \le n. \end{cases} \qquad (25)$$

Начальным периодам $0 \le t \le t^*_{ЛД}$, в которых постоянные лизинговые платежи лизингодателя минимальны $u_t^{opt} = b^{\min}$, соответствует траектория:

$$x_{t+1} = x_t(1+i) - b^{\min}, \quad t = 0, t^*_{ЛД}. \qquad (26)$$

Выполняя такие же математические действия, как в случае для лизингополучателя, получим формулу для неоплаченной стоимости лизингового имущества в начальные периоды:

$$x_t = K_0(1+i)^t - b^{\min}\frac{(1+i)^t - 1}{i}. \qquad (27)$$

Конечным периодам $t^*_{ЛД} < t \le n$, в которых постоянные лизинговые платежи лизингодателя максимальны $u_t^{opt} = b^{\max}$, соответствует траектория

$$x_t = \frac{x_{t+1} + b^{\max}}{1+i}, \quad t = n, t^*_{ЛД}. \qquad (28)$$

По аналогии получим формулу для стоимости лизингового имущества в конечные периоды:

$$x_t = b^{\max}\left[\frac{1 - (1+i)^{t-n}}{i}\right]. \qquad (29)$$

Приравнивая уравнения (27) и (29), найдем время переключения для лизингодателя:

$$t^*_{ЛД} = \log_{1+i}\left[\frac{b^{\max} - b^{\min}}{K_0 i + b^{\max}(1+i)^{-n} - b^{\min}}\right]. \qquad (30)$$

Рассмотрим численный пример. Условия лизингового договора: стоимость лизингового имущества после выплаты аванса K_0 = 1 000 000 руб.; срок договора n = 24 мес.; годовая ставка комиссионного вознаграждения i^* = 12%, лизинговые платежи начисляются ежемесячно m = 12. Лизинговым договором установлен минимальный ежемесячный платеж: $b^{\min}$ = 30 000 руб. Лизингополучатель может выплачивать не больше 60 000 руб. в месяц: $b^{\max}$ = 60 000 руб.

Область компромисса между лизингодателем и лизингополучателем, рассчитанная по формулам (21), (23), (26), (29), изображена на рисунке.

Используя формулы (24), (28), рассчитаем, соответственно, время переключения для лизинго-

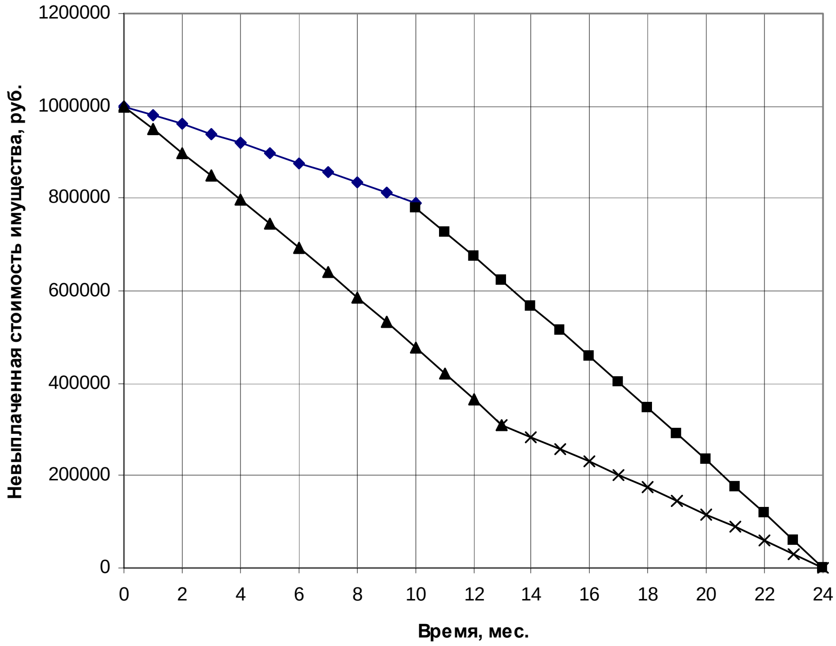

Рис. **Область компромисса между лизингодателем и лизингополучателем**

получателя: = 12,9 мес. - и время переключения для лизингодателя: $t^{*}_{\text{ЛД}}$ = 9,6 мес.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе представлены математические модели принятия оптимальных решений для лизингодателя и лизингополучателя. Задачи выбора траектории лизинговых платежей формулируются как задачи оптимального управления дискретными системами.

С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина определены оптимальные управления лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя. Для лизингополучателя наилучшей является схема выплат с убывающими лизинговыми платежами. Для лизингодателя наилучшей выступает схема выплат с возрастающими лизинговыми платежами. Полученные оптимальные стратегии лизингополучателя и лизингодателя определяют область компромисса, в которой должна находиться траектория невыплаченной стоимости лизингового имущества.

Для случая аннуитетных лизинговых платежей получены аналитические формулы, определяющие оптимальные траектории невыплаченной стоимости лизингового имущества, а также время переключения управления для лизингодателя и лизингополучателя. Приводится пример построения области компромисса между лизингодателем и лизингополучателем для аннуитетных платежей.

---

[1] См.: *Джуха В.М.* Лизинг. Ростов н/Д, 1999; *Киркоров А.Н.* Управление финансами лизинговой компании. М., 2006; *Горемыкин В.А.* Лизинг. М., 2008.

[2] *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973.

[3] Там же.

Поступила в редакцию 05.06.2010 г.