

Фрактальный анализ динамики цен на нефть

© 2010 О.И. Антипов

кандидат физико-математических наук, доцент

© 2010 А.В. Добрянин

доктор экономических наук

© 2010 Е.В. Неганова

© 2010 В.А. Неганов

доктор физико-математических наук

Поволжский государственный университет телекоммуникаций
и информатики, г. Самара

E-mail: neganov-samara@yandex.ru, dobr@psati.ru

На основе оценки показателя Херста хаотической динамики цен на нефть был сделан вывод о фрактальности этого процесса. Для оценки динамики процесса были применены основные методы фрактального анализа: вычисление корреляционного интеграла методом Грассбергера-Прокаччия и методом ложных ближайших соседей. Последний метод после его авторской модификации позволил прогнозировать на основе анализа предыдущих цен последующие устойчивые тренды, как положительные, так и отрицательные.

Ключевые слова: фрактальный рынок, показатель Херста, метод Грассбергера-Прокаччия, корреляционный интеграл, метод ложных ближайших соседей.

Введение

Э. Петерс предложил новую гипотезу фрактальных рынков (ФМР) как альтернативу теории эффективного рынка (ЭМР)¹. Фракталы локально случайны, но глобально детерминированы². При этом рынки, естественно, являются нелинейными детерминированными системами³. В работе предпринимается попытка описать фрактальный рынок динамики стоимости цен нефти с помощью фрактальных мер⁴. В работе⁵ подробно описаны основные фрактальные методы, используемые для анализа нелинейных процессов. В частности, в данной работе использовались такие методы, как метод нормированного размаха Херста⁶, метод вычисления корреляционного интеграла Грассбергера-Прокаччия и метод ложных ближайших соседей (МЛБС). Исследуя динамику цен на нефть-сырец (тикер Brent Crude, далее обозначим как ВС), отопительную нефть (тикер Heating Oil, далее обозначим как НО), светлый сырец и т.д., даже визуально легко выявить корреляцию между значениями данных цен. Это можно объяснить очень просто: при увеличении цены на любой из данных энергоносителей в кратчайшие сроки будет подниматься спрос на альтернативные источники энергии, что в свою очередь приведет к увеличению их стоимости. На рис. 1 показана корреляция между нормированными ценами на ВС и НО. В работе использовалась стандартная нормировка⁷, согласно которой нормированное значение любой цены S заключается в пределы изменения значения $[0, 1]$:

$$[S] = \frac{S - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}}, \quad (1)$$

где S_{\min} и S_{\max} - минимальное и максимальное значения цены S за исследуемый период;

$[\cdot]$ - оператор нормировки.

Та же самая картина наблюдается для всех остальных видов нефти.

В качестве основного объекта исследования в данной работе выступила динамика цены на нефть-сырец, поскольку именно она составляет львиную долю экспорта Российской Федерации. Задача состояла в выявлении определенных закономерностей между фрактальными мерами, вычисленными для относительно короткого временного участка исследуемого временного ряда, и сменой характера поведения этого ряда в ближайшее время.

1. Применение метода нормированного размаха к анализу

Первым этапом фрактального анализа любого фрактального ряда является расчет показателя Херста по методу нормированного размаха⁸, разработанного самим Херстом⁹. Ниже приведены основные выражения для расчета показателя Херста H . Среднее значение сигнала за время Δ определяется как

(2)

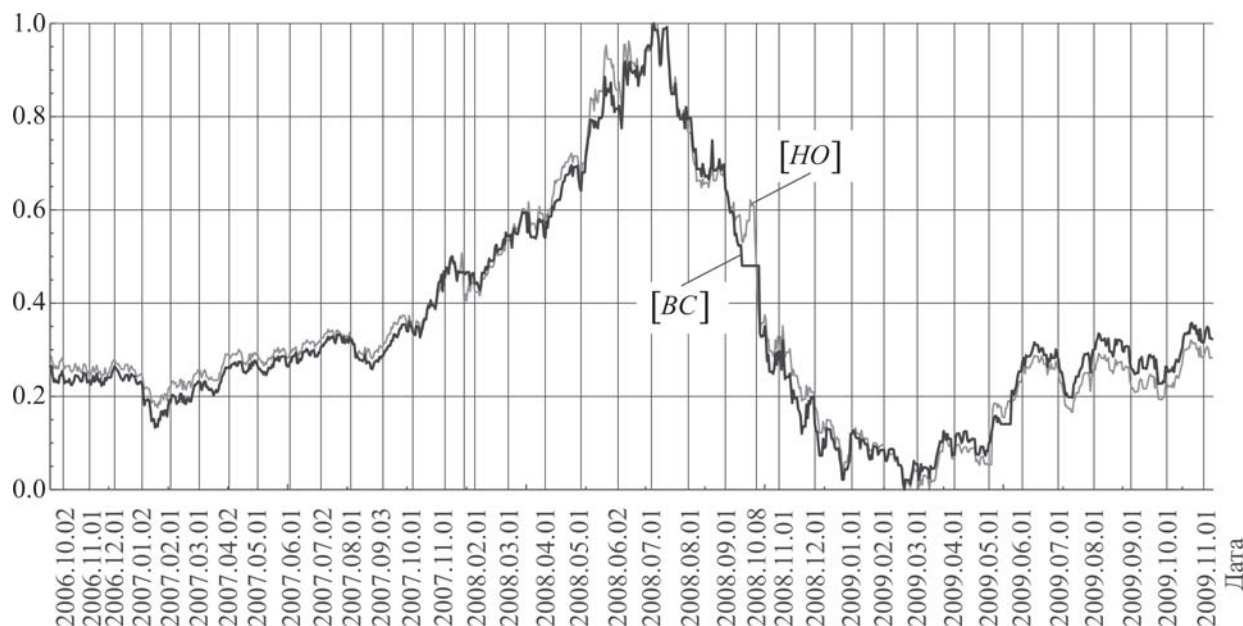


Рис. 1. Совместное представление нормированных значений цены на нефть-сырец (темная линия) и отопительную нефть [HO] (светлая тонкая линия)

Тогда $X(t)$ - накопившееся отклонение значения сигнала $x(t)$ от его среднего значения $\langle x \rangle_\Delta$ является суммой

$$X(t, \Delta) = \sum_{u=1}^t \{x(u) - \langle x \rangle_\Delta\}. \quad (3)$$

Размах отклонений будет определяться как

$$R(\Delta) = \max_{1 \leq t \leq \Delta} X(t, \Delta) - \min_{1 \leq t \leq \Delta} X(t, \Delta). \quad (4)$$

Стандартное отклонение можно получить по формуле квадратного корня из дисперсии

$$S(\Delta) = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\Delta} \sum_{t=1}^{\Delta} \{x(t) - \langle x \rangle_\Delta\}^2 \right\rangle}. \quad (5)$$

Для многих временных рядов наблюдаемый нормированный размах R/S очень хорошо описывается эмпирическим соотношением¹⁰

$$R/S = (\alpha\Delta)^H, \quad (6)$$

где H - показатель Херста.

Размах именуется нормированным, если он делится на квадратный корень из дисперсии, что позволяет применять его к самым различным системам.

По выражениям (1)-(6) и вышеизложенному алгоритму авторами была составлена программа в среде Mathematica, позволяющая рассчитывать показатель Херста для различных временных рядов. Для данного случая значение α бра-

лось равным 1. С помощью данной программы было рассчитано значение H для ряда, представленного на рис. 2. Полученное значение показателя $H = 1.13891$ говорит о том, что исследуемый ряд имеет фрактальную природу.

Для проверки правильности работы, разработанной авторами программы, данный ряд также был обработан с помощью программы Fractan 4.4, разработанной в Лаборатории обработки данных Института математических проблем биологии РАН (г. Пушкино Московской области) В.В. Сычевым. Это программа для вычисления корреляционной размерности, корреляционной энтропии и показателя Херста по временному ряду данных. Полученное с ее помощью значение показателя H составило $H = 1.1387$, что очень близко к полученным авторами результатам.

Различие между полученными значениями показателей H можно объяснить различиями в предварительной обработке данных, в частности в их нормировке. Авторы использовали стандартную нормировку¹¹, точность которой была ограничена 19 знаками после запятой, в то время как используемая в программе Fractan 4.4 целочисленная нормировка аналогична ограничению точности в 5 значащих цифр после запятой.

Особенностью программы Fractan 4.4 является то, что рассчитываемые с ее помощью ряды должны состоять не менее чем из 512 отсчетов. Также данной программой невозможно пользоваться для большого количества расчетов из-за

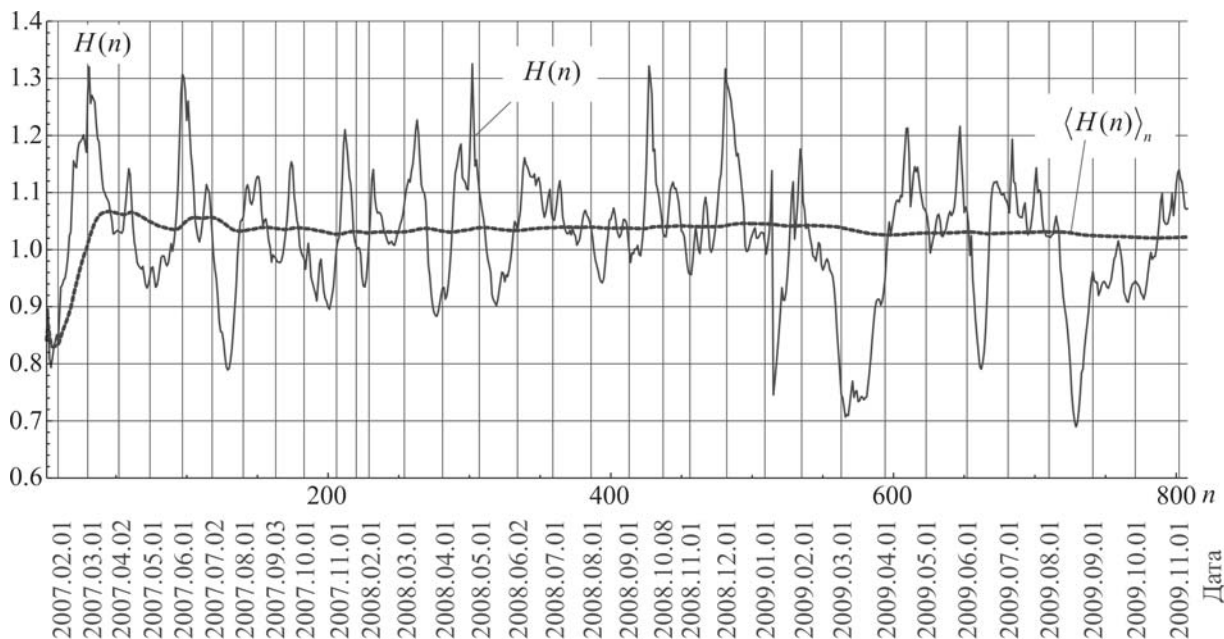


Рис. 2. Зависимость динамического значения от дня наблюдения n , рассчитанная на основании предыдущих 90 значений:

$\langle H(n) \rangle_n$ - среднее значение $H(n)$ за период наблюдения n

невозможности автоматизации данного процесса. Поэтому программа Fractan 4.4 в дальнейших расчетах не использовалась.

Затем был произведен расчет динамических значений показателя $H(n)$ для каждого дня исследуемого временного ряда на основании 90 отсчетов, предшествующих данному дню. Это количество отсчетов было выбрано не случайно, но об этом более подробно будет указано ниже. Авторы разработали программу, которая позволяет автоматически рассчитывать динамические значения показателя $H(n)$ для всех n для всего ряда за исключением первых 90 отсчетов, которые составляют длину окна расчета. Под длиной окна расчета будем понимать количество членов ряда, предшествующих каждому конкретному значению рассчитываемого ряда, которые, собственно, и используются для расчета.

На основании полученных данных можно сделать следующие выводы:

- среднее значение показателя Херста $\langle H(n) \rangle_n$ за период наблюдения n близко к значению показателя для всего ряда H . Кроме того, значение $\langle H(n) \rangle_n$ по прошествии нескольких месяцев наблюдения переходит в установившееся состояние, после чего практически не меняется;

- пределы отклонения динамического значения показателя колеблются в интервале примерно от 0,7 до 1,35, что говорит об относительно боль-

шой ошибке вычисления показателя по короткому ряду, однако однозначно свидетельствует о фрактальности анализируемого ряда, что в свою очередь говорит о его детерминистском происхождении;

- с точки зрения предсказания резких переломов в трендах для исследуемого ряда данных расчет не дал никаких результатов.

2. Метод Грассбергера-Прокаччия для вычисления корреляционного интеграла

Перед применением метода Грассбергера-Прокаччия к исследуемому ряду необходимо применить метод восстановления фазового пространства системы, который был предложен Такенсом. Следуя Такенсу¹², необходимо сконструировать пространство вложения (или псевдофазовое пространство) с m -мерным вектором по значениям одной наблюдаемой величины:

$$X_i = X(t_i) = \{x(t_i), x(t_i - \tau), \dots, x(t_i - (m-1)\tau)\}, \quad (7)$$

взятым со сдвигом τ . В данной работе из-за малости исследуемых рядов временная задержка τ бралась равной

Согласно теореме Такенса¹³, можно вычислить корреляционный интеграл (о котором будет сказано ниже) и фрактальную размерность по измерениям временной последовательности лишь одной составляющей. Для этого с помощью описанного выше метода восстановления фазового пространства, также известного как метод задержек, сформируем из исследуемого ряда

аттракторы в m -мерных псевдофазовых пространствах для $m = 1, 2, 3, \dots$. Далее для каждого аттрактора в пространстве m рассчитаем корреляционный интеграл по формуле¹⁴

$$Ce(\varepsilon, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N \sum_j^N \theta(\varepsilon - |x_i - x_j|), \quad i \neq j, \quad (8)$$

где N - количество точек аттрактора;

$|x_i - x_j|$ - абсолютное расстояние между i -й и j -й точками аттрактора в m -мерном пространстве;
 ε - размер разрешающей ячейки;
 - функция Хевисайда.

По сути говоря, $Ce(\varepsilon, N)$ - зависимость количества точек аттрактора в m -мерном пространстве, расстояние между которыми $< \varepsilon$ от размера разрешающей ячейки. Она отнесена к полному количеству пар точек, т.е. (в знаменателе формулы стоит $N(N-1)$, поскольку поставлено условие $i \neq j$).

По корреляционному интегралу определяется корреляционная размерность:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{d \lg Ce(\varepsilon, N)}{d \lg \varepsilon} \right], \quad (9)$$

причем при сравнительно малых значениях ε должен соблюдаться степенной закон

где D_C - корреляционная размерность.

Поскольку корреляционная размерность идет под индексом $q = 2$ в спектре Реньи, постольку она является нижней оценкой размерности Хаусдорфа-Безиковича (которая идет под индексом $q = 0$), так как спектр Реньи является ниспадающим с ростом индекса q ¹⁵.

Исходя из динамики цен на нефть-сырец (см. рис. 1) построены в двойном логарифмическом масштабе по основанию 10 зависимости $Ce(\varepsilon, N)$ от размеров элементарных ячеек ε . Затем выделены линейные участки кривых по методу наименьших квадратов, произведен поиск аппроксимирующих их прямых (рис. 3а). На рис. 3б построена по формуле (9) зависимость корреляционной размерности от размерности пространства вложения m . Из него следует, что зависимость $D_C(m)$ получает насыщение при $m = m_C = 31$. Это значение и определяет максимальную размерность пространства вложения, корректно описывающую аттрактор в реконст-

руированном псевдофазовом пространстве¹⁶. Тогда значение D_C будет соответствовать корреляционной размерности исследуемого псевдофазового аттрактора восстановленного из исследуемого ряда. Согласно теореме Такенса, эти характеристики отражают соответствующие значения динамической системы, породившей исследуемый ряд. Теоретически точка насыщения является таковой, если полученное значение корреляционной размерности D_C не будет меняться вплоть до $m = \text{int}[2D_C] + 1$ (здесь операция $\text{int}[\cdot]$ подразумевает округление в большую сторону). Соблюдение данного условия гарантирует надежность полученного результата. Для рассматриваемого ряда значений цен нефти-сырца зависимость $D_C(m)$ представлена на рис. 3б. Как видно из рисунка, значение независимой оценки размерности пространства вложения составило $m_C = 31$. Соответственно, значение корреляционной размерности составило $D_C = 2.91299$. Полученные значения корреляционной размерности $D_C = 2.91299$ и размерности пространства вложения $m_C = 31$ нуждаются в дополнительной оценке достоверности, что ниже и будет сделано с помощью оценки Экмана-Рюэля.

Конечно, на практике предел $N \rightarrow \infty$ в формулах корреляционного интеграла и корреляционной размерности не имеет смысла, поскольку длина исследуемых рядов всегда конечна. Размер разрешающей ячейки ε тоже варьируется не в пределах от 0 до . Это связано, прежде всего, с тем, что, с одной стороны, значение ограничено размерами аттрактора, а с другой стороны, минимальным расстоянием между самыми близкими точками аттрактора. Более того, линейный участок необходимо выделять по той причине, что, когда значение ε сопоставимо с размерами аттрактора (и, соответственно,), теряются сингулярности аттрактора.

Кривизна зависимости $Ce(\varepsilon, N)$ на этом участке зависит от неравномерности распределения плотности заселения точками аттрактора пространства. С другой стороны, при $\varepsilon \rightarrow 0$ наблюдается недостаточная статистика, связанная с конечностью длины исследуемого ряда N . Тут картину искривления создают точки псевдофазового пространства, которые рискнем назвать "слипшимися". Недостатком такого метода является то, что необходимо участие исследователя в выборе линейного участка. От длины такого участка бу-

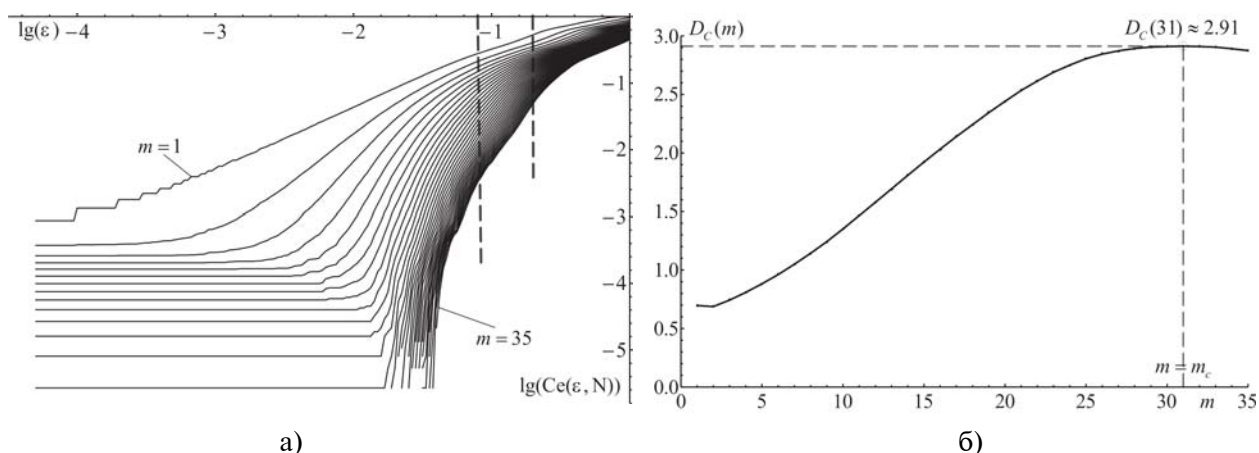


Рис. 3. Зависимости корреляционного интеграла C_e от размера элементарных ячеек ε для различных значений пространств вложения m (а) и зависимость фрактальной размерности от размерности пространства вложения m (б) для временного ряда нормированных значений цены на нефть-сырец (Brent Crude)

дет, соответственно, зависит точность оценки как корреляционной размерности, так и размерность пространства вложения.

Количественную оценку точности нахождения корреляционной размерности предложили Экман и Рюэль (1981). Обозначим через ε_{\max} максимальный размер элементарной ячейки, а через ε_{\min} минимальный размер элементарной ячейки, которые соответствуют началу и концу линейного участка зависимости $C_e(\varepsilon, N)$ от ε в двойном логарифмическом масштабе. Тогда обозначим их отношение через β . Считается, что при наличии свойств фрактальности $p > 2 \div 3$, а для надежного измерения D_C необходимо $p \approx 10$.

Также одно из основных условий данной оценки заключается в соблюдении неравенства

$$D_C < 2 \lg N, \quad (11)$$

где N - длина исследуемого ряда;

D_C - вычисленная корреляционная размерность этого ряда.

Теоретическое обоснование данных оценок более подробно дано в работах¹⁷.

Применяя данную оценку к исследуемому ряду, необходимо отметить следующее обстоятельство. Насыщение зависимости $D_C(m)$ у данного ценового ряда появляется только при выборе границ линейного участка, показанных на рис. 3б пунктирными линиями. При расширении этих границ насыщение зависимости $D_C(m)$ не наступает. Для полученных границ линейных участков характерны значения $\varepsilon_{\max} = 0.199526$ и $\varepsilon_{\min} = 0.0794328$, для кото-

рых значение $p = 2.51189$. Согласно оценке Экмана -Рюэля, данное обстоятельство говорит о наличии свойств фрактальности у исследуемого ряда, но надежного измерения фрактальной размерности D_C не гарантирует. Общая длина ряда N гарантирует надежное измерение корреляционной размерности D_C , вплоть до 6, и поэтому, с точки зрения длины ряда, полученному значению $D_C = 2.91299$ вполне можно доверять.

3. Метод ложных ближайших соседей (МЛБС)

Данный метод основан на теореме Такенса о вложении, из которой следует, что при соответствующем выборе временного лага τ и размерности пространства вложения m оригинальный и реконструированный псевдофазовый аттракторы должны быть топологически эквивалентны (гомеоморфны)¹⁸. Основы метода изложены в работе¹⁹. Поскольку траектории оригинального аттрактора не имеют самопересечений, постольку и в реконструированном аттракторе траектории также не должны пересекаться. Самопересечение траекторий реконструированного аттрактора означает, что размерность вложения меньше фрактальной размерности аттрактора, т.е. соответствующая псевдофазовая реконструкция не является биекцией. Условием того, что самопересечения будут отсутствовать, является то, что все соседние точки аттрактора, восстановленного в R^m , будут также являться соседними в R^{m+1} . МЛБС позволяет определить наименьшее значение размерности m пространства вложения, так что при переходе к размерности $(m+1)$ количе-

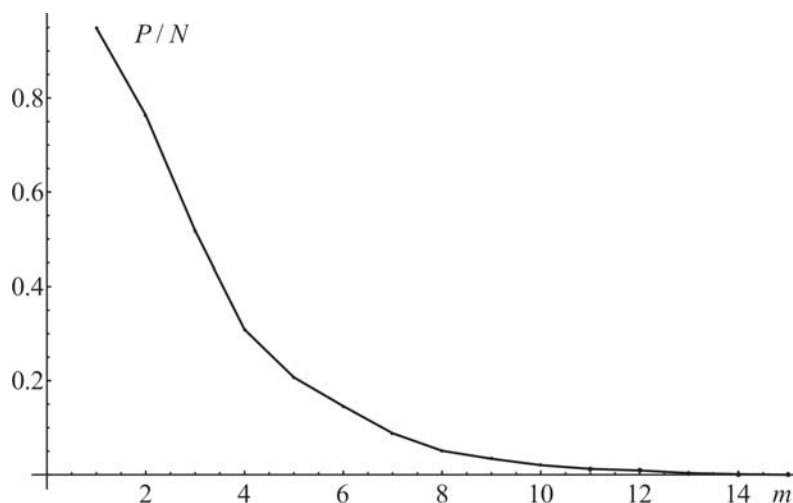


Рис. 4. Зависимость числа ЛБС P , отнесенного к общей длине ряда N , от размерности пространства вложения m для временного ряда нормированных значений цены на нефть-сырец (Brent Crude)

ство ложных соседей (точек аттрактора, близких друг к другу в R^m и отстоящих далеко в R^{m+1}) будет относительно мало. Полученное таким образом значение m_c определяет наименьшую размерность пространства, где возможна реконструкция аттрактора без самопересечений.

Алгоритм МЛБС состоит из следующих шагов²⁰:

1. Пусть $m = 1$. Находится для каждой точки $\bar{x}(i)$ временного ряда (1а) ближайшего “соседа” $\bar{x}(j)$ в m -мерном пространстве.

2. Вычисляется расстояние $\|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\|$.

3. Находится расстояние между данными точками на следующем шаге $\|\bar{x}(i+1) - \bar{x}(j+1)\|$ и определяется согласно формуле

$$R_i = \frac{\|\bar{x}(i+1) - \bar{x}(j+1)\|}{\|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\|}. \quad (12)$$

4. Если $R_i > R_j$, где R_j - подходящий порог, то точка $\bar{x}(j)$ является ложным ближайшим соседом (ЛБС) по отношению к точке $\bar{x}(i)$. В результате производится подсчет количества ложных ближайших соседей P для каждой точки $\bar{x}(i)$.

5. Вычисляется соотношение P/N , и алгоритм повторяется для $m = m + 1$.

6. Алгоритм продолжается до тех пор, пока частное P/N не станет близким к нулю.

Рекомендуемое значение порога $R_j = 2^{21}$.

На основании представленного алгоритма авторами была составлена программа, позволяющая рассчитывать количество ЛБС для различных временных рядов. Результат применения данной программы к исследуемому ряду представлен на рис. 4

в виде графика зависимости количества ЛБС P , отнесенного к общей длине ряда N , от размерности пространства вложения m . Из графика видно, что после погружения аттрактора, полученного методом задержек из исследуемого ряда, в псевдопространство с размерностью более чем 13, ложные соседи практически отсутствуют, что говорит о максимальной верхней независимой оценке размерности пространства вложения $m_c = 13$.

Поскольку в экономике чаще всего встречаются относительно короткие временные ряды, постольку вычисление количества степеней свободы с помощью МЛБС является затруднительной задачей, длина ряда не позволит восстанавливать аттракторы в многомерных пространствах. Тем более, что для выявления закономерности авторы решили ограничиться длиной ряда, не превышающей 120 отсчетов. Это связано с предположением, что количество игроков рынка покупки нефти за большой период значительно меньше. Тогда, опираясь на результаты исследований одного из авторов в области применения фрактальных мер к дискретно-нелинейным системам, была сделана следующая модификация МЛБС. В его работах было показано, что само отношение числа ЛБС P к общей длине ряда N при переходе из двумерного (псевдо-) фазового пространства ($m = 2$) в трехмерное ($m = 3$) определяет “скорость” сворачивания аттрактора в пространство вложения. Чем меньше это значение, тем быстрее сворачивается аттрактор в (псевдо-) фазовое пространство вложения. Это косвенно говорит о том, что на динамику исследуемого участка ряда влияет меньшее число факторов (т.е. в игроков рынка энергоносителей). Справедливо и обратное утверждение. Далее проводилось вычисление отношения P/N по следующей схеме. Задавалось так называемое окно

w - количество отсчетов временного ряда, предшествующих дню, для которого вычислялось значение P/N . Таким образом, длина ряда, для которого вычислялось отношение P/N , составляла w отсчетов и, соответственно, $N = w$. Тогда, отступив от начала общего исследуемого ряда (в нашем случае это ряд, представленный на рис. 1) на длину окна, можно для каждого следующего дня до конца исследуемого периода вычислить отношение P/w , чтобы отследить динамику его изменения.

В процессе исследования длина окна w варьировалась в пределах от 60 до 120 дней, что соответствует примерно 2-4 месяцам реального времени. Наиболее оптимальным, с точки зрения результатов, оказалось значение окна $w = 90$. Поскольку получаемые ряды были слишком короткими, постольку также варьировалось значение

порога R_i в пределах от 2 до 10. Наиболее хороший результат получался при $R_i \in (5; 6)$. Однако при изменении значений w и R_i в указанных выше пределах общая картина результатов несильно менялась. На рис. 5 показаны результаты вычисления отношения P/w для цены на нефть-сырец при значении окна $w = 90$ и значении порога $R_i = 2e$. Здесь жирной линией показано среднее значение величины P/w для каждого дня ряда за весь наблюдаемый период, определяемое по формуле

$$\langle P/w \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P/w)_i. \quad (13)$$

Из рис. 5 видна интересная закономерность: перед каждым длительным трендом наблюдается

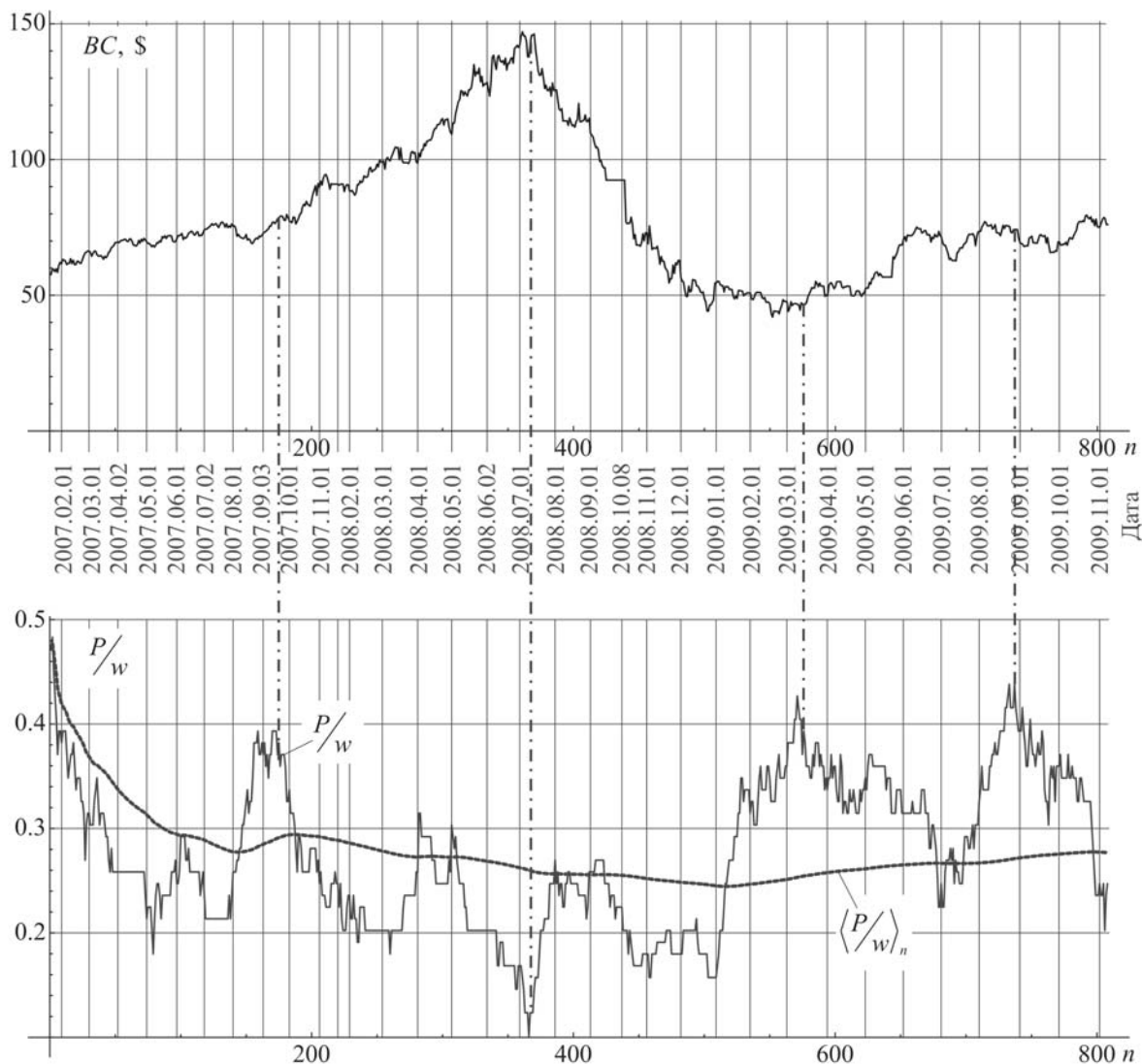


Рис. 5. Сопоставление экстремумов вычисленной зависимости количества ложных ближайших соседей P , отнесенной к длине окна w с соответствующими значениями цены нефти-сырца (начало ряда размером окна в 90 дней не показано)

явный экстремум зависимости P/w от n . Причем перед уменьшением цены это минимум зависимости P/w от n , а перед повышением это максимум.

Данный результат может быть использован в прогностических целях. Из полученных закономерностей можно сделать следующий вывод: как только проходит экстремум минимального значения отношения (сильное отклонение значения P/w от среднего наблюдаемого значения $\langle P/w \rangle_n$) предполагается длительный тренд, связанный с понижением цены на соответствующий энергоноситель. И наоборот, прохождение области сильного отклонения значения P/w от среднего наблюдаемого значения $\langle P/w \rangle_n$ в сторону увеличения свидетельствует о том, что в ближайшее время будет наблюдаться длительный тренд, связанный с повышением цены на энергоноситель. Это явление можно объяснить следующим предположением: снижение количества игроков данного рынка энергоносителя (т.е. его покупателей) предполагает скорое снижение цены на данный энергоноситель. Следуя данной логике, можно предположить, что увеличение количества участников данного рынка приведет к скорому планомерному повышению цены на данный энергоноситель.

Заключение

Основным фрактальным методом, давшим определенный результат, явился метод ложных ближайших соседей. В результате анализа рынка цен на нефть был предложен фрактальный метод анализа динамики изменения ее цены. Данный метод позволяет установить на анализе предыдущих значений цены нефти устойчивый тренд, связанный как с повышением, так и с понижением данной цены в ближайшем будущем. Причем предполагаемые положительные и отрицательные тренды имеют различные признаки. Характерная особенность предложенного авторами метода заключается в том, что он выступает модификацией фрактального метода, а значит, по своей природе, также является фрактальным.

Недостатком предлагаемого авторами метода является то, что необходима подстройка под конкретную ситуацию, которая предполагает поиск оптимального значения окна и порога.

¹ См.: Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка: пер. с англ. М., 2000; *Его же*. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М., 2004.

² Федер Е. Фракталы: пер. с англ. М., 1991.

³ Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. 2-е изд. М., 2009.

⁴ Ширяев В.И. Финансовые рынки: Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика: учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. М., 2009.

⁵ Головкин В.А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов // VII Всерос. науч.-техн. конф.

“Нейроинформатика 2005”: Лекции по нейроинформатике. М., 2005. С. 43-91.

⁶ См.: Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала...; *Его же*. Фрактальный анализ финансовых рынков...; Федер Е. Указ. соч.; Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs // Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 1951. □ 116. P. 770-808.

⁷ Ширяев В.И. Указ. соч.

⁸ См.: Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала...; *Его же*. Фрактальный анализ финансовых рынков...; Федер Е. Указ. соч.

⁹ Hurst H.E. Cit. op.

¹⁰ См.: Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков...; Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Указ. соч.; Ширяев В.И. Указ. соч.

¹¹ Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала...

¹² См.: Rosenstein M.T., Colins J.J., De Luca C.J. Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay time // Physica D. 1994. □ 73. P. 82-89; Fraser A.M., Swinney H.L. Independent coordinates for strange attractor from mutual information // Physical Review A. 1986. □ 33. P. 1134-1140; Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorovich J., Tsimring L. The analysis of observed chaotic data in physical systems // Review of Modern Physics. 1993. Vol. 65. □ 4. P. 1331-1392; Рюэль Д., Такенс Ф. Странные аттракторы. М., 1981. С. 117-151; Takens F. Detecting Strange Attractors in Turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, 1981. V. 898. P. 366-381; Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D. Chaos and Fractals. N.Y., 2004; Брур Х.В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф. Структуры в динамике. Конечномерные динамические системы / пер. с англ.; под ред. Л.М. Лермана. М.; Ижевск, 2003.

¹³ Takens F. Cit. op.

¹⁴ См.: Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Указ. соч.; Головкин В.А. Указ. соч.; Кузнецов С.П. Динамический хаос. М., 2001; Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиотехнических системах. М., 1990; Мусалимов В.М., Резников С.С., Чан Нгек Чау. Специальные разделы высшей математики. СПб., 2006; Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов, 2005; Постнов Д.Э., Павлов А.Н., Астахов С.В. Методы нелинейной динамики: учеб. пособие для студ. физ. фак. Саратов, 2008; Антипов О.И., Неганов В.А., Потапов А.А. Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах. М., 2009; Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск, 2001; Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. □ 9.

¹⁵ Федер Е. Указ. соч.

¹⁶ Головкин В.А. Указ. соч.

¹⁷ См.: Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Указ. соч.; Кузнецов С.П. Указ. соч.; Постнов Д.Э., Павлов А.Н., Астахов С.В. Указ. соч.

¹⁸ Головкин В.А. Указ. соч.

¹⁹ Kugiuntzsis D. State space reconstruction parameters in the analysis of chaotic time series - the role of the time window length, 1996.

²⁰ Головкин В.А. Указ. соч.

²¹ Брур Х.В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф. Указ. соч.