

## Модели авторегрессионной условной гетероскедастичности и волатильность финансовых рынков

© 2010 О.Е. Цацура

Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова

E-mail: oleg.tsatsoura@gmail.com

В статье рассматривается история развития одномерных моделей авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH), применяемых для моделирования волатильности финансовых рынков. Приводится краткий обзор некоторых типов моделей, процедур проверки гипотез и оценки параметров.

*Ключевые слова:* волатильность, гетероскедастичность, GARCH, финансовая эконометрика.

### Введение

Начиная с основополагающей статьи Engle<sup>1</sup>, модели авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH) получили значительное развитие - от сравнительно простых моделей и до значительно более сложных, позволяющих учесть многие особенности финансовых рынков. Областью практического применения таких моделей является количественная оценка рыночных рисков, оценка стоимости опционов и т.д. В обзоре мы кратко рассмотрим историю развития одномерных моделей ARCH и эмпирические особенности волатильности, повлекшие создание той или иной модели. Также мы дадим сжатое описание методов проверки статистических гипотез и оценки параметров.

Первоначально использованные для моделирования динамики инфляции модели ARCH в скором времени быстро нашли применение в анализе финансовых временных рядов. Причина популярности заключается в способности модели описать некоторые характерные свойства волатильности финансовых активов, замеченные Mandelbrot<sup>2</sup> и Fama<sup>3</sup>, а именно то, что за большими по абсолютному значению возмущениями вновь следуют большие возмущения, а малые возмущения, как правило, сопровождаются последующими малыми возмущениями (образуя скопления или так называемые кластеры волатильности). Со статистической точки зрения, это приводит к распределению, у которого сосредоточение массы в центре и “хвостах” больше, чем у нормального распределения (так называемое лептоэксцессное распределение, с коэффициентом эксцесса больше 3). В дальнейшем большая часть эмпирических исследований и практических приложений ARCH относилась именно к финансовым рынкам. Позже - одновременно Bollerslev<sup>4</sup> и Taylor<sup>5</sup> - была предложена модель GARCH, обладающая более экономной параметризацией, нашедшая применение в огромном

числе приложений - прежде всего в оценке рыночных рисков, а ее свойства стали объектом многочисленных теоретических исследований.

### Особенности волатильности и некоторые типы моделей ARCH

Будучи способными объяснить скопления волатильности во времени, указанные модели не могли захватить некоторых эмпирических особенностей поведения волатильности. Такими особенностями являются, в частности, различное влияние, оказываемое на волатильность положительной и отрицательной доходностью, медленно угасающая автокорреляция, отличие распределения стандартизированных остатков модели от нормального, а также зависимость доходности от волатильности. Ниже мы вкратце перечислим некоторые из предложенных способов решения данных проблем.

Асимметрия волатильности, или “эффект рычага”, проявляется в различном воздействии на волатильность одинаковых по абсолютному значению, но различных по знаку относительных изменений цены (т.е. доходность). При этом, как правило, отрицательная доходность приводит к большей волатильности, нежели положительная (однако такой эффект не наблюдается для рынка валют). Для решения этой проблемы Nelson<sup>6</sup> была предложена модель EGARCH, в которой предлагалось рассматривать не дисперсию доходности актива, а ее натуральный логарифм. В силу такого построения отрицательные возмущения оказывают большее влияние на волатильность, нежели положительные. Предложен альтернативный способ параметризации (модель TGARCH), позволяющий учесть асимметрию<sup>7</sup>. Для исследования асимметричной реакции волатильности на случайное возмущение Engle, Ng<sup>8</sup> вводят понятие новостной кривой (News impact curve), описывающей зависимость волатильности текущего периода от случайного возмущения

предыдущего периода, и предлагают полупараметрическую модель, в которой воздействие случайного возмущения на волатильность определяется непосредственно из данных.

При анализе квадратов дневных доходностей было замечено, что значения их автокорреляционной функции убывают крайне медленно<sup>9</sup>. Автокорреляционная функция процесса GARCH убывает быстрее; это означает, что между наблюдениями, разделенными временным промежутком, существует более сильная зависимость, чем подразумевает модель GARCH. Данная особенность называется длинной памятью (*long memory*). Один из способов решения этой проблемы был предложен Baillie, Bollerslev, Mikkelsen<sup>10</sup>, сформулировавших модель FIGARCH. Также Davidson<sup>11</sup> рассматривает модель, содержащую FIGARCH и GARCH, как частные случаи. С применением модели FIGARCH к анализу волатильности развивающихся рынков можно ознакомиться в Lardic, Mignon<sup>12</sup>.

Хотя процесс GARCH способен моделировать высокий коэффициент эксцесса, свойственный эмпирическим доходностям, однако часть эксцесса модель оставляет необъясненной, т.е. стандартизированные ошибки модели сильно отличаются от выбранного исследователем распределения. По этой причине для моделирования случайных возмущений было предложено использовать распределения, отличные от нормального, в частности, распределения Стьюдента<sup>13</sup> и обобщенное распределение ошибок (*generalized error distribution*)<sup>14</sup>. Другим возможным способом является использование не заранее выбранного распределения, а эмпирического<sup>15</sup>.

Проблема моделирования условных моментов более высокого порядка изучается авторами, предложившими модель, способную учесть переменную асимметрию<sup>16</sup>. Модель, учитывающая переменный эксцесс и переменную асимметрию, предложена и применена к расчету показателя Value at Risk<sup>17</sup>.

Исследование, установившее связь между доходностью и волатильностью актива было проведено Engle, Lillien, Robins<sup>18</sup>. Авторами предложена модель GARCH-M, включающая в уравнение условного математического ожидания доходности в качестве объясняющей переменной волатильность: как объект моделирования авторы рассматривали превышение доходности долгосрочной казначейской облигации над краткосрочной казначейской облигацией. Связь между автокорреляцией дневных доходностей и волатильностью была изучена LeBaron<sup>19</sup>.

Отдельным вопросом, возникающим при ARCH-моделировании, является постоянство па-

раметров модели во времени<sup>20</sup>. Действительно, поскольку обычно рассматриваются достаточно большие выборки, постольку неправдоподобно полагать, что в течение всего рассматриваемого периода свойства процесса, порождающего наблюдения, оставались неизменными. Многочисленные обвалы, происходящие на фондовых рынках, в особенности на развивающихся, резкие скачки цен на активы<sup>21</sup> могут породить наблюдения, которые нельзя адекватно описать моделью с неизменной структурой. Также следствием наличия нескольких режимов может быть упоминавшийся выше эффект “долгой памяти”<sup>22</sup>.

Исходя из предположения о существовании нескольких режимов, каждый из которых описывает волатильность на определенном участке ряда доходностей, Hagerud<sup>23</sup> и Gonzalez-Rivera<sup>24</sup> была предложена модель ST-GARCH, в которой переход между режимами плавно осуществляется посредством переходной функции, зависящей от предшествующего значения случайного возмущения. Аналогичная модель, но со скачкообразными переходами разработана Fornari, Mele<sup>25</sup>. Модели подобного рода были применены, в частности, для моделирования обменных курсов валют<sup>26</sup> и, по результатам авторов, дают существенное преимущество по сравнению с “однорежимными” моделями. Также разновидность модели с плавными переходами может быть использована для моделирования эффекта “долгой памяти”<sup>27</sup>.

Специфическая сложность данного типа моделей проявляется на этапе оценки, поскольку параметры являются крайне чувствительными как к начальному приближению при численном решении задачи нахождения максимума логарифмической функции правдоподобия, так и к выбранному для этого численному алгоритму<sup>28</sup>.

### Проверка гипотез и тестирование моделей

Для моделей ARCH был разработан ряд процедур для анализа исходных данных (на практике под исходными данными подразумевают либо квадраты доходностей, либо квадраты остатков моделей доходности) и для анализа спецификации оцененной модели. Наиболее распространенным является тест Энгла на авторегрессионную гетероскедастичность<sup>29</sup>; также были предложены тесты для проверки гипотезы о наличии асимметричности в изучаемых данных<sup>30</sup>, причем, будучи модифицированными, эти тесты можно использовать для исследования чувствительности волатильности к большому положительным и отрицательным возмущениям, а также для проверки гипотезы о наличии асимметрии в остатках оцененной модели.

После того как была оценена модель, становится возможным проверить гипотезы о необ-

ходимости модели более высокого порядка - соответствующий тест был предложен Bollerslev и приведен в<sup>31</sup>. Возможно также рассмотреть в качестве альтернативной гипотезы модель EGARCH - соответствующие тесты предложены в<sup>32</sup>. Если исследователь полагает, что свойства изучаемого им ряда претерпевали изменения во времени, то следует провести тестирование на постоянство параметров модели, а также на возможную нелинейную альтернативу, представленную моделью с плавными переходами между режимами<sup>33</sup>. Удобная единая схема проверки гипотез для исходных данных и для оцененных моделей была разработана Lundbergh, Terasvirta<sup>34</sup>.

Поскольку для практического использования наиболее интересной представляется способность моделей авторегрессионной гетероскедастичности производить рекурсивный прогноз волатильности, постольку представляется естественным оценить точность такого прогноза, например среднеквадратической ошибкой прогноза. Однако сложность состоит в том, что процесс волатильности, с которым следует сравнить модельный прогноз, не является непосредственно наблюдаемым - действительно, для определения волатильности в каждый момент времени необходимо иметь несколько реализаций доходности<sup>35</sup>. По этой причине выбор показателя для сравнения довольно затруднителен. На практике, в качестве показателя, аппроксимирующего истинную волатильность, иногда принимают квадрат доходностей, однако при таком выборе модели авторегрессионной гетероскедастичности демонстрируют очень плохую способность прогноза<sup>36</sup>. Помимо того, разумное приближение может быть получено из формул Блэка-Шоулза для ценообразования опционов<sup>37</sup>.

Другим способом оценки точности прогноза может служить сравнение прогнозного значения с оценкой волатильности, полученной по данным, собранным с большей частотой. По собранным данным рассчитывается историческая волатильность (подробный обзор существующих методов расчета, анализ каждого из них и указания по выбору оптимального временного интервала даны в работе<sup>38</sup>).

Engle предложил в качестве оценки точности прогноза доходность торговых или инвестиционных стратегий, использующих модели ARCH<sup>39</sup>. Любопытно, что подобный метод используется для оценки эффективности технических торговых стратегий<sup>40</sup>.

### Оценка параметров моделей

Очевидно, что вопрос определения численного значения параметров модели является наи-

более важным для приложений. Оценка параметров производится, как правило, методом максимального правдоподобия (ММП), хотя возможны и другие подходы, например обобщенный метод моментов или байесовское оценивание. Важно заметить, что поскольку предположение о нормальности случайных возмущений соблюдается редко, постольку по данной причине функция максимального правдоподобия оказывается неверно специфицированной и для параметров невозможно указать привычные нормальные квантили. Для этого была предложена робастная оценка ковариационной матрицы параметров, устойчивая в широком классе распределений (подробно с изложением метода, а также ММП можно ознакомиться, например, в работе<sup>41</sup>).

Другой способ учесть негауссовость случайных возмущений - указать распределение вероятностей непосредственно (уже упомянутое распределение Стьюдента и обобщенное распределение ошибок). Однако теория квазикационального правдоподобия достаточно развита только для гауссовской функции МП - по этой причине для этих распределений робастную ковариационную матрицу указать нельзя<sup>42</sup>.

Сама ковариационная матрица может быть найдена как аналитическое выражение (однако это достаточно трудоемкая задача) либо приближенно, по достаточно простому способу, предложенному в работе<sup>43</sup>. Однако следует иметь в виду, что приближенное значение может значительно отличаться от аналитического. Аналитические выражения для модели GARCH можно найти в работе<sup>44</sup>. Выбор оптимизационного алгоритма для численного решения задачи максимизации функции МП также играет существенную роль<sup>45</sup>.

<sup>1</sup> Engle R.F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. Is. 4.

<sup>2</sup> Mandelbroit B. The Variation of Certain Speculative Prices // *J. of Business*. 1963. □ 36. P. 394-419.

<sup>3</sup> Fama E.F. The Behavior of Stock Market Prices // *J. of Business*. 1965. □ 38. P. 34-105.

<sup>4</sup> Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // *J. of Econometrics*. 1986. □ 31. P. 207-327.

<sup>5</sup> Taylor S. Modeling Financial Time Series. Wiley, Chichester, 1986.

<sup>6</sup> Nelson D.B. Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach // *Econometrica*. 1991. Vol. 59. Is. 2.

<sup>7</sup> Glostein L.R., Jaganathan R., Runkle D.E. On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // *The J. of Finance*. 1993. Vol. 48. Is. 5.

- <sup>8</sup> Engle R.F., Ng V.K. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. University of California, San Diego, University of Michigan, Ann Arbor, 1991.
- <sup>9</sup> Terasvirta T. An Introduction to Univariate GARCH Models // SSE/EFI Working Papers in Economics and Finance. 2006. No 646.
- <sup>10</sup> Balillie R.T., Bollerslev T., Mikkelsen H.O. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // J. of Econometrics. 1996. □ 74. P. 3-30.
- <sup>11</sup> Davidson J. Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroskedasticity Models and a New Model // J. of Business and Economic Statistics. 2004. □ 22. P. 16-29.
- <sup>12</sup> Lardic S., Mignon V. Term Premium and Long-Range Dependence in Volatility: A FIGARCH-M Estimation on Some Asian Countries // J. of Emerging Market Finance. 2004. Vol. 3. P. 1-19.
- <sup>13</sup> Bollerslev T. Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Asset Returns // Review of Economics and Statistics. 1987. □ 69. P. 542-549.
- <sup>14</sup> Nelson D.B. Cit.op.
- <sup>15</sup> Engle R.F., Gonzalez-Rivera G. Semiparametric ARCH Models // J. of Business and Economic Statistics. 1991. □ 9/4. P. 345-359.
- <sup>16</sup> Harvey C.R., Siddique A. Autoregressive Conditional Skewness, National Bureau of Economic Research. Georgetown University, 1999.
- <sup>17</sup> Bali T.G., Mo H., Tang Y. The Role of Autoregressive Conditional Skewness and Kurtosis in the Estimation of Conditional VaR. New York University. City University of New York, Baruch College, 2005.
- <sup>18</sup> Engle R.F., Lilien D.M., Robins R.P. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model // Econometrica. 1987. Vol. 55. Is. 2.
- <sup>19</sup> LeBaron B. Some Relationships Between Volatility and Serial Correlations in Stock Market Returns // J. of Business. 1992. □ 65. P. 199-219.
- <sup>20</sup> Lundbergh S., Terasvirta T. Evaluating GARCH Models / Department of Economic Statistics. Stockholm School of Economics, 1999.
- <sup>21</sup> Твардовский В., Паршиков С. Секреты биржевой торговли: торговля акциями на фондовых биржах. М., 2007.
- <sup>22</sup> Frances P, Dijk D. Non-linear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press, 2003.
- <sup>23</sup> Hagerud G.E. A Smooth Transition ARCH Model for Asset Returns // Working Paper. Stockholm School of Economics. 1996.
- <sup>24</sup> Gonzalez-Rivera G. Smooth Transition GARCH Models // Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. 1998. □3. P. 61-78.
- <sup>25</sup> Fornari F., Mele A. Modeling the Changing Asymmetry of Conditional Variances // Economics Letters. 1996. □ 50. P. 197-203.
- <sup>26</sup> Lundbergh S., Terasvirta T. Modelling Economic High-Frequency Time Series with STAR-STGARCH models / Department of Economic Statistics. Stockholm School of Economics, 1998.
- <sup>27</sup> Lanne M., Saikkonen P. Nonlinear GARCH Models for Highly Persistent Volatility // Econometrics J. 2005. □ 8. P. 251-275.
- <sup>28</sup> Chan F., McAleer M. Estimating Smooth Transition Autoregressive Models with GARCH Errors in the Presence of Extreme Observations and Outliers / The Institute of Social and Economic Research. Osaka University, 2001.
- <sup>29</sup> Frances P, Dijk D. Cit.op.
- <sup>30</sup> Engle R.F., Ng V.K. Cit.op.
- <sup>31</sup> Terasvirta T. Cit.op.
- <sup>32</sup> Malmsten H. Evaluating Exponential GARCH Models / Department of Economic Statistics, Stockholm School of Economics // SSE/EFI Working Papers in Economics and Finance. 2004. □ 564.
- <sup>33</sup> Hagerud G.E. Cit.op.
- <sup>34</sup> Lundbergh S., Terasvirta T. Evaluating GARCH Models / Department of Economic Statistics. Stockholm School of Economics, 1999.
- <sup>35</sup> Tsay R.S. Analysis of Financial Time Series. Wiley, 2005.
- <sup>36</sup> Frances P, Dijk D. Non-linear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press, 2003.
- <sup>37</sup> Tsay R.S. Analysis of Financial Time Series. Wiley, 2005.
- <sup>38</sup> Brandt M.W., Kinlay J. Estimating Historical Volatility. Duke University, Investment Analytics. 2005.
- <sup>39</sup> Tsay R.S. Cit.op.
- <sup>40</sup> Колби П. Энциклопедия технических индикаторов рынка. М., 2007.
- <sup>41</sup> Greene W.H. Econometric Analysis. Prentice Hall. 2002.
- <sup>42</sup> Lutkepohl H., Kratzig M. Applied Time Series Econometrics. Cambridge University Press, 2004.
- <sup>43</sup> Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models / E.K. Berndt [et al.] // Annals of Economic and Social Measurement. 1974. □ 3/4. P. 653-665.
- <sup>44</sup> Fiorentini G., Calzolari G., Panatoni L. Analytic Derivatives and the Computation of GARCH Estimates // J. of Applied Econometrics. 1996. □ 11. P. 399-417.
- <sup>45</sup> Konishi S., Kitagawa G. Information Criteria and Statistical Modeling. Springer, 2007.

Поступила в редакцию 08.02.2010 г.