

## Моделирование активных стратегий управления краткосрочным портфелем ценных бумаг

© 2009 В.В. Казарян

Всероссийский НИИ проблем вычислительной техники и информатизации  
E-mail: ross@pvti.ru

Предложен подход к сведению задачи выбора оптимальных активных стратегий управления портфелем ценных бумаг к задаче булева программирования.

*Ключевые слова:* портфель ценных бумаг, булево программирование, финансовый рынок, спекулятивные операции, фондовый рынок, менеджер-аналитик, государственные ценные бумаги.

К настоящему времени стало ясно, что наступил масштабный кризис представлений о фондовом рынке. Рынок потерял привычное обличье, картина мира обновилась, новая непредсказуемость рынка вызвала потребность в ревизии ранее построенных моделей. Все это вызывает большие трудности оценки и прогнозирования значений рыночных показателей и усложняет применение долгосрочных инвестиционных стратегий, вследствие чего наиболее популярна сейчас активная стратегия управления портфелем, которая сводится к частому пересмотру портфеля в поисках финансовых инструментов, неверно оцененных рынком, и торговле ими с целью получить более высокую доходность.

Анализ существующих подходов позволяет утверждать, что в настоящее время отсутствуют эффективные методы определения активных стратегий решения задачи управления портфелем ценных бумаг. В этих условиях менеджер, управляющий портфелем, имеет широкий спектр разнообразных вариантов осуществления сделки, и ему приходится принимать решение о ее целесообразности таким образом, чтобы с учетом рисков обеспечить требуемую доходность портфеля на заданном временном интервале.

Таким образом, объективная реальность развития финансового рынка свидетельствует о том, что на данном этапе требуются новые подходы к формированию портфеля ценных бумаг, новые способы оценки рыночного риска в условиях невозможности долгосрочного и среднесрочного прогнозирования тенденций фондового рынка.

**Содержательная постановка задачи.** На содержательном уровне сформулирована постановка задачи управления портфелем ценных бумаг на плановом интервале  $[t_1, t_2]$ , которая основана на следующем сценарии. Рассмотрим плановый интервал  $[t_1, t_2]$ . Предположим, что имеется юридическое лицо (будем называть менеджером), которое работает на фондовом рынке с ценными бумагами. Кроме того, имеются инвесторы, ко-

торые заключают с менеджером договоры по передаче ему денежных средств на определенных условиях. Условия передачи денежных средств могут быть самыми разными. В частности, инвестор может дать менеджеру какую-то сумму денег на определенный срок с условием возврата их в конце срока под заданные проценты или с условием, что менеджер должен вернуть сумму с процентами частями в оговоренные заранее сроки и т.п. Кроме того, предполагается, что у менеджера имеется единственный вид деятельности, помимо заключения договоров с инвесторами, а именно спекулятивные операции по купле-продаже ценных бумаг на фондовом рынке.

В текущий момент времени  $t$  менеджер имеет определенное количество заключенных договоров с инвесторами, которое, в частности, может быть равно 0. Предположим, что на плановый период  $[t_1, t_2]$  ему предлагается заключить еще один новый договор. В узком смысле, задача, которую мы хотим решить, состоит в том, чтобы ответить на вопрос: выгоден ли менеджеру новый договор? В более широком смысле, рассматриваемая нами задача состоит в том, чтобы составить оптимальный по прибыли план купли и продажи ценных бумаг на период  $[t_1, t_2]$ . При этом период может рассматриваться как скользящий.

При решении названных задач мы будем использовать принцип гарантированного результата, суть которого в том, чтобы с учетом случайных колебаний объемов продаж и цен получить максимально возможный приток капитала.

**Формальная постановка задачи.** Для удобства изложения мы начнем наше рассмотрение с самого простого вида ценных бумаг, а именно с государственных ценных бумаг (ГЦБ). Удобство ГЦБ состоит в том, что для них не предусмотрены дивиденды и нет налогов на покупку и продажу. Предположим, кроме того, что отсутствуют ограничения на объемы покупок и продаж ГЦБ. При этих условиях единственным источ-

ником неопределенности является цена ГЦБ в моменты покупки и продажи, т.е. в моменты, принадлежащие плановому периоду  $[t_1, t_2]$ . Отметим вместе с тем, что рассматриваемая далее модель относится как к ГЦБ, так и к другим ценным бумагам (ЦБ).

Введем следующие обозначения:  $N$  - количество видов ЦБ, обращающихся на первичном и вторичном фондовом рынке;  $i$  - номер ЦБ;  $i = 1, \dots, N$ .  $C_{H_i}(t)$  - прогноз нижней, а  $C_{B_i}(t)$  - прогноз верхней границы цены ЦБ, номер  $i$  на момент  $t$ . Очевидно, что  $C_{H_i}(t) \leq C_{B_i}(t)$  для всех  $i$  и  $t$ .  $M(t)$  - количество свободных денежных средств на расчетном счете у менеджера на момент  $t$ ;  $S_i(t)$  - количество ЦБ вида  $i$ , которым располагает менеджер в момент  $t$ ;  $x_i(t)$  - количество ЦБ вида  $i$ , которое менеджер предполагает приобрести в момент  $t$ ;  $y_i(t)$  - количество ЦБ вида  $i$ , которое менеджер предполагает продать в момент  $t$ .

Минимальный капитал, которым будет располагать менеджер на момент  $t_2$  и который следует максимизировать, составит:

$$K(t) = M(t_1) + \sum_{i=1}^N C_{H_i}(t_1) \cdot S_i(t_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N y_i(t) \cdot C_{H_i}(t) - \sum_{i=1}^N x_i(t) \cdot C_{B_i}(t) \right) \rightarrow \max. \quad (1)$$

Должны соблюдаться балансовые ограничения, а именно: в каждый момент времени должен соблюдаться баланс денежных средств (этот баланс не должен быть отрицательным):

$$K(t) > 0 \text{ для всех } t \leq t_2. \quad (2)$$

Кроме того, должен соблюдаться баланс каждой ценной бумаги:

$$S_i(t_1) - \sum_{t=t_1}^t y_i(t) + \sum_{t=t_1}^t x_i(t) \geq 0 \quad (3)$$

для всех  $t_1 \leq t \leq t_2$  и всех  $i$ .

В совокупности система уравнений (1) - (3) представляет собой условно-экстремальную задачу. Ее решением являются графики оптимальных покупок и продаж ценных бумаг, иными словами, набор функций:  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определенных на интервале  $[t_1, t_2]$ .

Условия (1) и (2) эквивалентны условиям (4) и (5), соответственно:

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N y_i(t) \cdot C_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^N x_i(t) \cdot C_{H_i}(t) \right) \rightarrow \max. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Если } \sum_{t=t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N y_i(t) \cdot C_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^N x_i(t) \cdot C_{H_i}(t) \right) < 0, \\ \text{то } \left| \sum_{t=t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N y_i(t) \cdot C_{B_i}(t) - \sum_{i=1}^N x_i(t) \cdot C_{H_i}(t) \right) \right| \leq V, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{где } V = M(t_1) + \sum_{i=1}^N C_{H_i}(t_1) \cdot S_i(t_1).$$

В формулировке (3) - (5) рассматриваемая задача трудноразрешима. Рассмотрим способ приближенного представления этой задачи в виде задачи булевого программирования.

Предположим, что в непрерывном интервале  $[t_1, t_2]$  выделено конечное множество точек  $t_e$ ,  $e = 1, \dots, E$ . В частности,  $e$  может обозначать номер дня по порядку от начала планового периода  $[t_1, t_2]$ . В каждый момент времени  $t_e$  объемы покупок и продаж любой ценной бумаги могут быть различными. Определим для каждой ЦБ номер  $i$  и каждого момента времени  $t_e$  некоторые возможные объемы покупок и продаж, т.е. установим значения величин:

$$x_{i,e}^r, i = \overline{1, N}, r = \overline{1, R}, e = \overline{1, E} \\ \text{и } y_{i,e}^r, i = \overline{1, N}, r = \overline{1, R}, e = \overline{1, E}. \quad (6)$$

Надо отметить, что определение значений

величин  $x_{i,e}^r$  и  $y_{i,e}^r$  не является технически сложной задачей. В частности, можно установить минимальное значение покупок и продаж, а также чувствительный размер приращения этой величины  $\Delta_i$  для каждой ГЦП, номер  $i$  и положить:

$$x_{i,e}^r = y_{i,e}^r = x_{i,e}^1 + \Delta_i r, i = \overline{1, N}, r = \overline{1, R}, e = \overline{1, E}.$$

Как показывает опыт, обычно  $R \leq 7$ .

Введем в рассмотрение булевы переменные:

$$\alpha_{i,e}^r, \beta_{i,e}^r, \forall r, \forall i, \forall e. \quad (7)$$

С учетом введенных переменных и обозначений систему неравенств (3) можно приближенно представить в виде совокупности систем неравенств (8) и (9):

$$S_i(t_1) - \sum_{e=1}^k \sum_{r=1}^R y_{i,e}^r \cdot \alpha_{i,e}^r + \sum_{e=1}^k \sum_{r=1}^R x_{i,e}^r \cdot \beta_{i,e}^r \geq 0, \\ k = \overline{2, E}, i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$\sum_{r=1}^R \alpha_{i,e}^r \leq 1, e = \overline{1, E}, i = \overline{1, N};$$

$$\sum_{r=1}^R \beta_{i,e}^r \leq 1, e = \overline{1, E}, i = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Условие (4) приближенно представляется совокупностью систем неравенств (9) и (10):

$$\sum_{e=1}^E \left( \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R y_{i,e}^r \cdot \alpha_{i,e}^r \cdot C_{H_i}(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R x_{i,e}^r \cdot \beta_{i,e}^r \cdot C_{B_i}(t) \right) \rightarrow \max, \quad (10)$$

а система неравенств (5) в виде совокупности систем неравенств (9) и (11):

$$M(t_i) + \sum_{e=1}^k \left( \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R y_{i,e}^r \cdot \alpha_{i,e}^r \cdot C_{H_i}(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R x_{i,e}^r \cdot \beta_{i,e}^r \cdot C_{B_i}(t) \right) \geq 0, k = \overline{2, E}. \quad (11)$$

В задаче (6) - (11) в уравнениях присутствуют разности, или, что то же самое, отрицательные величины, что делает ее неразрешимой. Вместе с тем при любых заранее заданных  $\alpha_{i,e}^r, \forall r, \forall i, \forall e$  задача (6) - (11) превращается в задачу булевого программирования в канонической форме относительно переменных  $\beta_{i,e}^r, \forall r, \forall i, \forall e$ , а при любых заранее заданных  $\beta_{i,e}^r, \forall r, \forall i, \forall e$  задача (6) - (11) является задачей булевого программирования в канонической форме относительно переменных  $\alpha_{i,e}^r, \forall r, \forall i, \forall e$ . Содержательный смысл этих задач состоит в том, что если менеджер составит любой план покупок, то, решив задачу, можно получить оптимальный план продаж и, наоборот, для любого плана продаж можно составить оптимальный план покупок. С помощью итерационного решения задач, а также с применением скольжения временного интервала можно исследовать сценарии на различные плановые периоды.

Преобразование исходной формулировки задачи (1) - (3) в задачу булевого программирования (6) - (11) приводит, как уже отмечалось, к некоторой потере точности. Это связано с тем, что непрерывные функции  $x_i(t)$  и  $x_i(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $i = 1, \dots, N$  заменены наборами дискретных значений  $x_{i,e}^r, i = \overline{1, N}, r = \overline{1, R}, e = \overline{1, E}$  и

$y_{i,e}^r, i = \overline{1, N}, r = \overline{1, R}, e = \overline{1, E}$ . Чем большую точность мы хотим получить, тем на большее количество точек следует разбивать плановый период и интервалы возможных значений объемов покупок и продаж ценных бумаг. Это означает увеличение размерности задачи с увеличением ее точности. Вместе с тем при решении булевых задач объем вычислений существенно зависит от размерности задачи, а также от ее структуры.

В данной связи возникает вопрос и вычислительной реализуемости задачи. Размерность задачи (6) - (11) определяется следующими параметрами:

- во-первых, количеством значений переменных  $x_{i,e}^r$  или  $y_{i,e}^r$ , которое равно произведению  $N \cdot R \cdot E$ ;
- во-вторых, количеством ресурсных ограничений, которое равно количеству уравнений (8) и (11), т.е. величине:  $(E-1) \cdot N + E - 1 = (E-1) \cdot (N+1)$ ;
- в-третьих, количеством логических условий (9), равным  $N$ ;
- в-четвертых, количеством элементов, входящих в уравнение типа (9), оно равно  $N$ .
- в-пятых, типом логических условий, т.е. условий (9).

Несильно ограничивая практические возможности применения модели, можно сказать, что количество периодов, обычно измеряемых в днях, составляет, как правило, не более 3, но часто равно 1 дню. Так что  $E \leq 3$ . Количество вариантов возможных значений покупки или продажи ценной бумаги, рассматривать которые имеет реальный смысл, также не более 3. Например, речь может идти о приобретении пакета ЦБ в 1000, либо в 5000, либо в 15000. Нет необходимости рассматривать варианты в 1000, 1001, 1002, ..., 15000. Следовательно  $R \leq 3$ . Количество ценных бумаг, с которыми оперативно работает менеджер также невелико - от 7 до 10, иными словами,  $N \leq 10$ .

Количество значений переменных  $N \cdot R \cdot E \leq 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$ . Эта величина вполне приемлема. Что касается других условий, то они тем более не являются существенными.

Формулировка (6) - (11) позволяет снять все упрощающие предположения, которые были приняты при получении формулировки (1) - (3). В частности, не изменяя структуры модели, можно учесть налоги на покупку и продажу ценных бумаг, необходимость выплаты дивидендов, а также ограничения на объемы покупок и продаж. Все эти условия могут быть учтены при установлении значений величин  $x_{i,e}^r$  и  $y_{i,e}^r$ , вхо-

дящих в соотношения (6) - (9). Это означает, что рассмотренная постановка распространяется на случай не только ГЦБ, но и ЦБ других видов.

Представление задачи в виде модели булевого программирования открывает возможность и для других ее обобщений. В частности, формулировка, которая нами проанализирована, является пессимистической в том смысле, что в ней предполагается: покупки будут сделаны по высоким ценам  $C_B$ , а продажи - по низким ценам  $C_H$ . Вместо этого допущения можно рассматривать наиболее вероятные цены, учитывая при необходимости соответствующие доверительные интервалы. Расчет наиболее вероятных значений может быть сделан с помощью вспомогательных сервисных программ или средствами Excel.

Таким же образом могут быть учтены различные варианты поступления и выплат средств. Нет никакой необходимости предполагать, что менеджер получает от инвестора средства в момент  $t_1$  и возвращает их с процентами в момент  $t_2$ . Возможен любой договорный режим получения и выплаты средств.

Целью деятельности менеджера не всегда может быть максимум прибыли, а это может быть, например, максимальное увеличение свободных денежных средств к определенному моменту времени, либо получение периодического дохода на как можно большем интервале времени, либо получение нескольких фиксированных выплат в заранее определенные моменты времени и т.п. Модель может быть модифицирована для учета данных целей.

Модель (6) - (11) распадется на две взаимодополнительные, а именно на модель оптимизации плана продаж при заданном плане покупок и модель оптимизации плана покупок при заданном плане продаж. Рассмотрим эти модели в единичном интервале времени. Вначале обратимся к модели оптимизации плана продаж в единичном временном интервале при заданном плане покупок.

То, что план покупок задан, означает, что переменным  $\beta_{i,e}^r$  приданы определенные значения. Единичность интервала, в свою очередь, означают, что  $e = k = 1$ . В этом случае соотношения (8) - (11) приобретают вид (12) - (15), соответственно:

$$\sum_{r=1}^R y_i^r \cdot \alpha_i^r \leq C_i, i = \overline{1, N}, \quad (12)$$

где  $C_i = \sum_{r=1}^R x_i^r \cdot \beta_i^r + S_i(t_1), i = \overline{1, N}$ ,

$$\sum_{r=1}^R \alpha_i^r \leq 1, i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R y_i^r \cdot \alpha_i^r \cdot C_{H_i}(t) \rightarrow \max, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R y_i^r \cdot \alpha_i^r \cdot C_{H_i}(t) \geq S, \quad (15)$$

где  $S = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R x_i^r \cdot \beta_i^r \cdot C_{B_i}(t) - M(t_1)$ .

Условия (15) отличаются от канонической формулировки направлением знака неравенства. Условия (12) и условия (15) в совокупности определяют допустимый интервал возможных значений для целевого показателя (14).

В отсутствие условия (15) решение задачи (12) - (15) может быть получено путем выбора максимально возможных, т.е. удовлетворяющих условиям (12) объемов продаж. Наличие условия (15) делает необходимым исследовать все возможные варианты продаж, включая варианты с частичной продажей. Для выполнения такого исследования следует ввести в рассмотрение условный ограниченный ресурс - общее количество продаваемых ЦБ, которое формально должно быть ограничено. Таким образом, мы вводим дополнительное условие:

$$\sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^N y_i^r \cdot \alpha_i^r \leq \bar{C}. \quad (16)$$

При этом  $\bar{C}$  должно быть больше или равно сумме имеющихся в наличии ЦБ и планируемых покупок.

Обратимся теперь к задаче оптимизации плана покупок в единичном временном интервале при заданном плане продаж. То, что план продаж задан, означает, что переменным  $\alpha_{i,e}^r$  приданы определенные значения. Единичность интервала, как уже отмечалось, означают  $e = k = 1$ . В этом случае соотношения (8) - (11) приобретают вид (17) - (20), соответственно:

$$\sum_{r=1}^R x_i^r \cdot \beta_i^r \geq V_i, i = \overline{1, N}, \quad (17)$$

где  $V_i = \sum_{r=1}^R y_i^r \cdot \alpha_i^r - S_i(t_1), i = \overline{1, N}$ ,

$$\sum_{r=1}^R \beta_i^r \leq 1, i = \overline{1, N}, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R x_i^r \cdot \beta_i^r \cdot C_{B_i}(t) \rightarrow \min, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R x_i^r \cdot \beta_i^r \cdot C_{B_i}(t) \leq W, \quad (20)$$

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^R y_i^r \cdot \alpha_i^r \cdot C_{H_i}(t) + M(t_1).$$

Условия (17) отличаются иной, нежели принято в канонической формулировке, направленностью знака неравенства. Условия (17) и условия (20) в совокупности определяют допустимый интервал возможных значений для целевого показателя (19).

В отсутствие условия (20) решение задачи (17) - (20) может быть получено путем выбора минимально возможных, т.е., удовлетворяющих условиям (17) объемов покупок. Наличие условия (20) делает необходимым исследовать все возможные варианты покупок, включая варианты с большими, чем минимальные, покупками. Для выполнения такого исследования необходимо ввести в рассмотрение условный ограничен-

ный ресурс - общее количество покупаемых ЦБ, которое формально должно быть ограничено. Таким образом, мы вводим дополнительное условие:

$$\sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^N x_i^r \cdot \beta_i^r \geq \bar{V}. \quad (21)$$

При этом  $\bar{V}$  выражает количество ЦБ, которое необходимо непременно закупить.

**Вывод.** Представление задачи в виде булевого программирования открывает возможности и для других обобщений модели. В частности, формулировка, которая нами проанализирована, является пессимистической в том смысле, что в ней предполагается - покупки будут сделаны по высоким ценам  $C_b$ , а продажи по низким ценам  $C_n$ . Вместо этого допущения можно рассматривать наиболее вероятные цены, учитывая при необходимости соответствующие доверительные интервалы. Расчет наиболее вероятных значений может быть сделан с помощью вспомогательных сервисных программ или средствами Excel. Таким же образом могут быть учтены различные варианты поступления и выплат средств. Нет никакой необходимости предполагать, что менеджер получает от инвестора средства в момент  $t_1$  и возвращает их с процентами в момент  $t_2$ . Возможен любой договорный режим получения и выплаты средств.

*Поступила в редакцию 08.11.2009 г.*