Формирование оптимальной структуры портфеля ценных бумаг на основе концепции управления риском как ресурсом

© 2010 В.Д. Селютин
доктор педагогических наук, профессор
Орловский государственный университет
E-mail: selutin_v_d@mail.ru

В данной работе излагается подход к выявлению оптимальной структуры инвестиционного портфеля, основанный на концепции управления риском как ресурсом.

Ключевые слова: риск как ресурс, модель Марковица, оптимальный уровень риска.

Наиболее известным подходом к решению задачи выделения оптимальной структуры портфеля ценных бумаг, по-видимому, следует считать подход, предложенный Г. Марковицем[1]. Основная идея данного подхода состоит в следующем. При формировании портфеля рациональному инвестору следует одновременно максимизировать доходность и минимизировать риск, т.е. при прочих равных условиях инвестору следует выбрать портфель, обеспечивающий заданную или максимальную доходность с минимальным уровнем риска. Дальнейшее развитие данный подход получил в работах Г. Александера, Д. Бэйли, Д. Тобина, У. Шарпа и др. Фактически управление риском портфеля в рамках этого подхода основывается на концепции минимизации риска, т.е. при формировании портфеля риск следует снижать.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход к формированию оптимального инвестиционного портфеля, основанный на концепции управления риском как ресурсом[2].

Предположим, что лицом, принимающим решение, уже реализованы этапы выбора инвестиционной политики и анализа конкретных видов активов, включаемых в портфель, т.е. определены общий объем средств и отдельные виды активов.

Рассмотрим более подробно этап формирования портфеля ценных бумаг, заключающийся в установлении пропорций распределения инвестируемого капитала между выбранными активами. Введем обозначения, необходимые для математического описания данного этапа.

Пусть y_i - доля инвестируемого капитала в акции *i*-й компании, причем $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$. Доходность акций *i*-й компании (обозначим ее X_i) в предстоящем периоде владения во многом является величиной неопределенной, причем ее значение зависит от множества различных факторов, например от прибыли данной компании. Поэтому будем считать, что величина X_i является случайной. Тогда $(X_1, X_2,..., X_n)$ - случайный вектор доходностей активов портфеля, а $(m_1, m_2,..., m_n)$ - вектор их ожидаемых значений в предстоящем периоде владения. Следовательно, доходность портфеля $X = \sum_{i=1}^{n} y_i X_i$ - случайная величина. При этом ожидаемая доходность портфеля равна:

$$E(X) = E(X_1 y_1) + ... + E(X_n y_n) =$$

$$= m_1 y_1 + ... + m_n y_n = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,. \qquad (1)$$

В качестве меры риска инвестиционного портфеля будем использовать дисперсию

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \sum_{i=1}^{n} m_i y_i\right)^2\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j (X_i - m_i)(X_j - m_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} y_i y_j, \qquad (2)$$

где $v_{ij} = E(X_i - m_i)(X_j - m_j)$ - соответствующие коэффициенты ковариации. Тогда во введенных обозначениях модель Марковица запишется в виде

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} y_i y_j \quad \to \min \qquad (3)$$

[1] См.: *Markowitz H.* Portfolio Selection // The J. of Finance. 1952. Vol. VII. No 1. P. 77-91; *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции. М., 2001.

[2] *Бублик Н.Д., Силантьев В.Б.* Риск-ресурс: Проблемы венчурно-стохастической деятельности. Уфа, 1999.

$$\begin{cases} m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n = M, \\ y_1 + \ldots + y_n = 1, \\ y_i \geq 0. \end{cases}$$

Здесь M - значение доходности портфеля, заданное экзогенно.

Таким образом, модель (3) для заданного уровня доходности M позволяет определить оптимальные пропорции распределения инвестиционного капитала между активами, соответствующие минимальному уровню риска.

Рассмотрим альтернативный подход к формированию портфеля, основанный на концепции управления риском как ресурсом.

Основная идея данного подхода состоит в следующем. Известно, что между уровнями доходности и риска существует определенная зависимость. Так, при низком уровне риска следует, как правило, ожидать небольшой уровень доходности. При высоком уровне риска портфеля ожидаемая доходность также минимальна, поскольку увеличивается возможность потерь. Тогда можно предположить, что существует некий *оптимальный* уровень риска, при котором уровень доходности будет максимальным. Также не исключены варианты, когда наименьшему или наибольшему значению уровня риска соответствует максимальное значение доходности. Так, при анализе статьи Г. Марковица[3] были выявлены следующие виды качественного поведения функции доходности $M(r)$, зависящей от уровня риска r (рис. 1).

На данных рисунках представлены результаты применения модели Марковица для случая двух активов. Множество $A=\{abc\}$ определяет множество допустимых портфелей, т.е. тех портфелей, для которых пропорции распределения y_1 и y_2 инвестируемого капитала между двумя видами активов удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Точка $y_{\min}$ - это точка, в которой функция риска (2) достигает минимума. Взаимное расположение точки $y_{\min}$ и множества $\{abc\}$ допустимых портфелей (рис. 1 *"а"*, *"в"*, *"д"*, *"ж"*) определяет поведение функции $M(r)$ (рис. *"б"*, *"г"*, *"е"*, *"з"*). Исходя из этого, выдвинем следующие предположения относительно поведения функции доходности $M(r)$ в зависимости от уровня риска r:

1) $M(r)$ возрастает для всех $r \leq r_{opt}$;

2) $M(r)$ убывает для всех $r > r_{opt}$;

3) r_{opt} - единственная точка максимума.

Проверим обоснованность выдвинутых предположений.

Рассмотрим функцию риска портфеля $V(X)$, определенную выражением (2), и множество допустимых портфелей:

$$A = \{y_i \mid y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, y_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Так как функция $V(X)$ является непрерывной в R^n, а множество A - компакт, то $V(X)$ принимает наименьшее и наибольшее значения на данном множестве.

Для нахождения наименьшего (наибольшего) значения функции $V(X)$ на множестве A сформулируем следующую задачу условной оптимизации:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} y_i y_j \to \min\ (\max)$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, \\ y_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{4}$$

Для решения такой оптимизационной задачи могут быть использованы соответствующие методы условной оптимизации, например, модифицированный метод Лагранжа[4], позволяющий учитывать условие неотрицательности переменных.

Пусть r_0 и R_0 - наименьшее и наибольшее значения функции $V(X)$ на множестве A, найденные при решении задачи (4). Рассчитаем уровень оптимального риска $r_{opt} \in [r_0, R_0]$, при котором функция доходности портфеля $E(X)$ принимает наибольшее значение. Для этого запишем следующую оптимизационную задачу:

$$M(r) \equiv E(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i \quad \to \max$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} y_i y_j = r^0, \quad r^0 \in [r_0, R_0], \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, \\ y_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{5}$$

[3] *Markowitz H.* Cit. op.

[4] *Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M.* Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Wiley-Interscience, 2006.

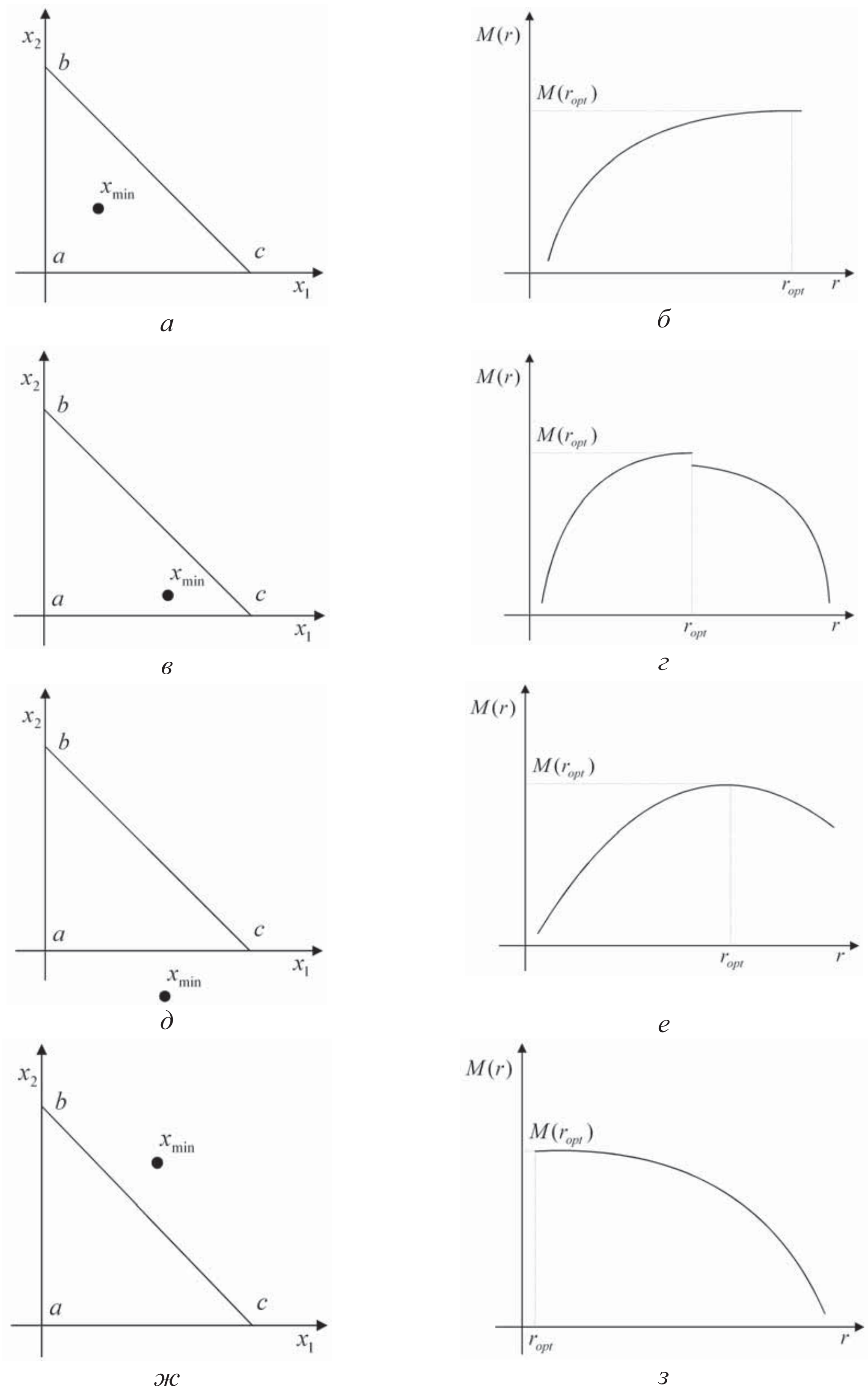

Рис. 1. **Качественное поведение зависимости доходности портфеля от уровня риска**

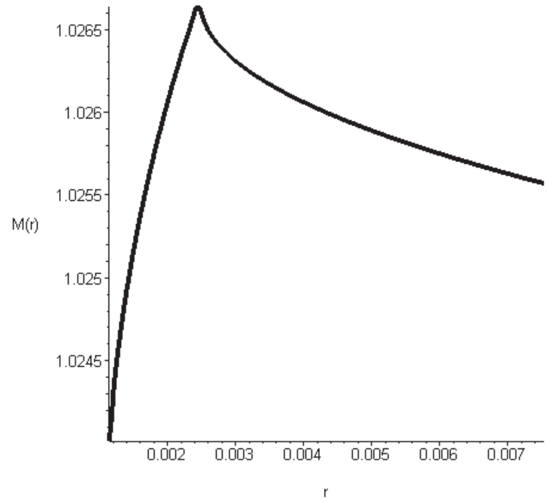

Рис. 2. **График функции доходности портфеля M(r)**

Здесь r^0 - параметр задачи, принимающий значения из отрезка $[r_0, R_0]$. Так как целевая функция непрерывна, а допустимое множество является компактным, то задача (5) имеет решение. Перебирая значение параметра r^0 с некоторым шагом h, получим последовательность оптимизационных задач вида (5). Далее, решив каждую из полученных задач, возьмем наибольшее из последовательности найденных оптимальных значений целевой $E(X)$. Значение параметра, соответствующее выбранному наибольшему значению целевой функции, примем в качестве оптимального уровня риска. При этом найденное оптимальное решение задачи (5) (обозначим его $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*$) определяет пропорции распределения инвестируемого капитала между выбранными видами активов.

Таким образом, следует принять предположение о существовании единственной точки оптимального уровня риска, при котором значения доходности портфеля будет максимальными. Обоснование двух других предположений (о возрастании и убывании) приводится в статье А.Б. Секерина[5].

Проверка выдвинутых предположений проводилась также эмпирически с помощью вычислительных экспериментов по формированию портфеля ценных бумаг. Приведем общую схему реализации вычислительного эксперимента.

По акциям каждой из выбранных компаний за один и тот же период времени составлялась выборка объемом 300 наблюдений - цены закрытия. Затем данная выборка разбивалась на 20 интервалов по 15 наблюдений. По каждому интервалу рассчитывалось отношение последнего наблюдения к первому. Доходность любого инструмента за весь период определялась как средняя этих величин. Далее определялись функции доходности (2) и риска (3) портфеля, и решались оптимизационные задачи (4) и (5). Для формирования портфеля использовались акции как отечественных, так и зарубежных компаний. В состав пакета входило от 4 до 10 инструментов.

Приведем основные результаты вычислительного эксперимента по формированию одного из портфелей.

Портфель составлялся из акций 4 отечественных компаний. Полученная зависимость доходности портфеля от уровня риска приведена на рис. 2. В соответствии с результатами эксперимента максимальная ожидаемая доходность портфеля 1,0266 достигается при уровне риска 0,0024. Оптимальные пропорции распределения инвестируемого капитала между акциями компаний следующие: $y_1^* = 0{,}8374$, $y_2^* = 0{,}0000$, $y_3^* = 0{,}0265$, $y_4^* = 0{,}1361$.

Аналогично проводились другие вычислительные эксперименты по формированию портфеля. При этом с точки зрения промежутков возрастания и убывания для всех рассмотренных портфелей поведение зависимости доходности от уровня риска было схожим с поведением теоретически выявленных зависимостей (см. рис. 1 *“б”*, *“г”* и *“е”*).

Таким образом, на основании результатов проведенной эмпирической проверки следует принять все выдвинутые выше гипотезы о качественном поведении функции доходности в зависимости от уровня риска.

Предложенный подход к формированию оптимальной структуры портфеля позволяет выявить оптимальный уровень риска, при котором доходность максимальна.

Поступила в редакцию 03.12.2009 г.

[5] *Секерин А.Б.* Концепция риска как ресурса и ее применение к портфельным инвестициям // Вестн. ВГУ. Сер. “Экономика”. Воронеж, 2006. № 1. С. 155-161.