

Математическая интерпретация государственных сбережений в национальной экономике

© 2009 А.Н. Сухарев

кандидат экономических наук, доцент
Тверской государственной университет

В статье рассмотрены различные варианты инвестирования и расходования средств фонда государственных сбережений, расходования средств государственных сбережений в форме номинального и реального аннуитета и в форме фиксированного процента по отношению к ВВП.

Ключевые слова: сбережения, фонд государственных сбережений, накопление, капитализация, ставка процента.

Математическая интерпретация государственных сбережений позволяет глубже понять механизм формирования государственных финансовых активов и управления ими в условиях различных количественных характеристиках ВВП, инфляции и прочих переменных. В свою очередь, это позволяет оценить возможность реализации той или иной схемы формирования и расходования фондов государственных сбережений.

Введем следующие обозначения: V - валовой внутренний продукт страны (ВВП); S , W - номинальный и реальный ВВП; D - объем государственных сбережений по отношению к ВВП; i - долгосрочная номинальная ставка процента (в коэффициентной форме); r - долгосрочная реальная ставка процента (в коэффициентной форме); g - долгосрочные годовые темпы роста экономики (в коэффициентной форме); δ - годовой темп инфляция (в коэффициентной форме); t - количество лет осуществления накоплений; d - доля текущих государственных сбережений по отношению к ВВП.

В качестве математической модели рассмотрим аннуитетные схемы расходования государственных сбережений в рамках трех вариантов: номинального аннуитета, реального аннуитета и долевого аннуитета¹.

Номинальный аннуитет представляет собой одинаковые суммы расходования денежных средств государством за счет сформированных им сбережений. Однако постоянство ежегодных расходов государства за счет созданных сбережений не означает равенства объемов товаров и услуг, на которые их можно приобрести, из-за

изменения уровня цен (инфляции). Поэтому под реальным аннуитетом мы будем понимать изъятия денежных средств из фонда государственных сбережений, имеющие одинаковую покупательную способность. Также следует ввести понятие долевого аннуитета - расходования фонда государственных сбережений в виде изъятия из него сумм, равных определенной доле от ВВП.

Первый вариант - расходование государственных сбережений в форме номинального аннуитета. Преимущество номинального аннуитета состоит в необходимости со стороны государства осуществлять фиксированные номинальные выплаты, например, выплаты по погашению каких-либо обязательств, имеющих номинальное выражение. Недостатками такой схемы является наличие искажающего влияния цен, которые обесценивают постоянные номинальные денежные изъятия и приводят к большим реальным изъятиям в первые периоды и к меньшим - в последующие. Кроме того, здесь не учитывается такой относительный показатель, как рост национальной экономики, что изменяет роль и влияние денежных изъятий на национальную экономику. По мере роста инфляции и роста экономики влияние номинального аннуитета с течением времени ослабевает.

По данной схеме размер ежегодного номинального аннуитета (S_c) можно рассчитать следующим образом:

$$S_c = S \cdot i / [1 - (1 + i)^{-(t-1)}].$$

При учете того, что государство будет в течение t лет формировать фонд государственных сбережений, отчисляя в него ежегодно s денежных единиц (рублей, долларов и т.д.), и затем в течение t лет будет их равномерно тратить, величина годового номинального аннуитета составит:

$$S_c = s \cdot [(1 + i)^{m+1} - 1] / [(1 + i)^{-(t-1)}].$$

Второй вариант - расходование государственных сбережений в форме реального аннуитета.

¹ Аннуитет (от лат. annuitas - ежегодный платеж) - равные друг другу денежные платежи, выплачиваемые через определенные промежутки времени в счет погашения долга, кредита. Аннуитет можно рассматривать как ограниченную во времени ренту - одинаковые платежи в счет погашения обязательства или периодические одинаковые платежи по расходованию денежных средств.

Преимуществом реального аннуитета является возможность осуществлять со стороны государства покрытие каких-либо расходов в будущем вне зависимости от изменения уровня цен. Недостатком такой схемы выступает неучет изменения потребностей государства вследствие изменения ВВП.

Размер ежегодного реального аннуитета (S_c) можно рассчитать следующим образом:

$$W_c = W \cdot r / [1 - (1+r)^{-(t-1)}]$$

или заменяя реальную ставку процента на номинальную с учетом инфляции:

$$W_c = W \cdot (i - \delta) / (1 - [(1+i)/(1+\delta)]^{-(t-1)}) (1+\delta).$$

Реализация схемы реального аннуитета должна предполагать оценку расходования сформированного фонда государственных сбережений в денежной форме для каждого из годов их расходования. Это может быть осуществлено путем умножений реального аннуитета на индекс цен, где в качестве базиса выступает год, предшествующий году начала осуществления аннуитетных выплат. Тогда реальный аннуитет в денежном выражении для t -года расходования фонда государственных сбережений составит:

$$S_{ct} = S \cdot r \cdot (1+p)^t / [1 - (1+r)^{-(t-1)}];$$

$$S_{ct} = S (i - \delta)(1+\delta)^t / (1 - [(1+i)/(1+\delta)]^{-(t-1)}) (1+\delta).$$

Третий вариант - использование долевого аннуитета (как доля от ВВП) при формировании и расходовании государственных сбережений. Преимуществом долевого аннуитета является то, что он отражает изменяющиеся возможности и потребности государства в зависимости от изменения ВВП и уровня цен.

По данной схеме предполагается, что государство каждый год сберегает определенный процент от ВВП, а затем производит изъятие средств из сформированного фонда сбережений, равное определенной постоянной доле ВВП.

Расчет объема фонда государственных сбережений может быть произведен по формуле суммы геометрической прогрессии, где в качестве первого члена должна выступать доля сбережения ВВП со стороны государства (d), а в качестве знаменателя прогрессии - соотношение индексов реальной ставки процента и роста реального ВВП (т.е. отношение $(1+r)/(1+g)$). Тогда сформированный объем государственных сбережений по отношению к ВВП через t лет составит:

$$D_t = d[(1+r)/(1+g)]^t - 1 / [(1+r)/(1+g)] - 1, \text{ или}$$

$$D_t = d[(1+g)[(1+r)/(1+g)]^t - 1 / (r - g).$$

Используя взамен реальной ставки процента номинальную процентную ставку и вводя показатель инфляции, объем фонда государственных сбережений можно рассчитать следующим образом:

$$D_t = d[(1+i)/(1+\delta)(1+g)]^t - 1 / [(1+i)/(1+\delta)(1+g)] - 1.$$

Обозначая $\bar{\delta} = (1+r)/(1+g)^2$, получим:

$$D_t = d(\bar{a}^t - 1) / (\bar{a} - 1) -$$

или $D_t = s[(1+g)(\bar{a}^t - 1) / (r - g)].$

При значении $\bar{a} < 1$ на бесконечном горизонте будет существовать предел отношения государственного сберегательного фонда к ВВП:

$$D_{\max} = d / (1/\bar{a} - 1),$$

$$\text{или } D_{\max} = d / [(1+g)/(1+r) - 1],$$

$$D_{\max} = d(1+r)/(g-r).$$

При $\bar{a} > 1$ объем фонда государственных сбережений теоретически должен возрастать бесконечно по отношению к ВВП. Однако в действительности это не будет иметь место из-за того, что возрастающий фонд государственных сбережений будет приводить к увеличению предложения ссудного и инвестиционного капитала в экономике, что должно иметь следствием снижение реальной ставки процента вплоть до отрицательного значения. В условиях $\bar{a} = 1$ будет иметь место равенство $r = g$. Тогда при постоянной доле государственных сбережений в ВВП, равной d , потребуется D/d лет, чтобы достичь объема государственных сбережений, равных D . При $r > g$ количество таких лет будет меньше. При $r < g$ требуемое значение D может быть и не достигнуто, в случае, если оно будет превышать предельно возможное его значение (D_{\max}).

В таблице нами представлено 10 сценарных вариантов формирования объема государственных сбережений по отношению к ВВП. Так, например, по второму варианту государству, чтобы сформировать объем сбережений, равный ВВП в течение 10 лет в условиях реальной ставки доходности инвестированных средств 10% годовых (инвестирование в акции) и роста национальной экономики 8% в год, необходимо ежегодно сберегать 8,1% от ВВП. В шестом варианте, сберегая в течение 20 лет 5% от ВВП при темпах роста экономики 5% в год и годовой реальной доходности сберегаемых средств 6% годовых, государство сформирует объем государственных сбережений, равный 1,1 от ВВП, или 110% от ВВП.

Реальный объем средств фонда государственных сбережений к t -году должен составить:

$$W_t = D_t(1+g)^t = d(1+g)^{t+1} [(1+r)^t / (1+g)^t - 1] / (1+r),$$

$$\text{или } W_t = d[(1+r)^t - (1+g)^t],$$

$$W_t = d(1+g)^t (\bar{a}^t - 1) / \bar{a}.$$

Номинальный объем средств в фонде государственных сбережений к t -году составит:

² Значение $(\bar{a}-1)/100$ представляет собой своеобразный "процент" приращения остатка средств государственных сбережений по отношению к ВВП (он может иметь и отрицательное значение).

Сценарные варианты формирования объема государственных сбережений (как доля от ВВП)

Вариант	Период формирования госу-дарств. сбережений	Доля текущих государственных сбережений, % от ВВП	Реальная ставка процента	Темп роста экономики	Объем сформированного фонда госу-дарств. сбережений (по отношению к ВВП)
1	5	7	5	8	0,24
2	10	8,1	10	5	1,0
3	10	10	10	5	1,24
4	20	1	19,4	4	1,0
5	20	3	3	4	0,55
6	20	5	6	5	1,10
7	50	1	4	3	0,64
8	50	4	10	3,5	12,75
9	50	5	10	3,5	15,94
10	100	3	4	3,5	3,85

$$S_t = W_t(1 + \delta)^t,$$

или $S_t = d(1+g)^{t+1}(1 + \delta)^t \left[\frac{(1+r)^t}{(1+g)^t} - 1 \right] / (1+r),$

$$S_t = d(1+\delta)^t [(1+r)^t - (1+g)^t],$$

$$\dot{S}_t = d(1+g)^t (\dot{a}^t - 1) (1 + \delta)^t / \dot{a}.$$

Из формулы $D_t = d(\dot{a}^t - 1) / (\dot{a} - 1)$ рассчитаем количество лет формирования (t) данной величины фонда государственных сбережений по отношению к ВВП (D) при условии зачисления в него доли d от ВВП:

$$t = \ln [(\dot{a}D + d) / d] / \ln \dot{a},$$

или $t = \ln [((D(1+r) / (1+g) + d) / d) / \ln [(1+r) / (1+g)];$

$$t = \ln [((D(1+r) / d(1+g)) + 1) / \ln [(1+r) / (1+g)];$$

$$t = \ln [(D(r - g) / d(1+g)) + 1] / \ln \dot{a}.$$

Обратим внимание, что значение $\dot{a}D + d$ должно быть больше нуля, в противном случае под логарифмом будет отрицательное число, что означает недостижимость формирования относительного объема фонда государственных сбережений при заданных параметрах системы. Иначе, данное неравенство может быть записано следующим образом:

$$|D(r - g) / (1+g)| > d.$$

Тогда, чтобы достичь требуемого относительно ВВП объема фонда государственных сбережений, необходимо ежегодно сберегать (d_{\min}):

$$d_{\min} = |D(r - g) / (1+g)|.$$

Например, при долгосрочных темпах роста экономики 5% и долгосрочной реальной ставке процента, равной 3%, чтобы достичь (хотя бы в на бесконечном горизонте) объема государственных сбережений, равных ВВП, государству ежегодно необходимо сберегать не менее чем:

$$d_{\min} = |1 \cdot (0,03 - 0,05) / (1+0,05)| = 0,0095,$$

или 0,95% ВВП.

Заметим, что при $r > g$ не существует d_{\min} . Иными словами, государство может сберегать сколь угодно малую долю от текущего ВВП и сможет при этом достичь сколь угодно большого объема сбережений по отношению к ВВП.

Рассмотрим теперь модель, по которой государство в течение n лет формирует фонд государственных сбережений, а затем в течение k лет их расходует. В рамках модели принимается постоянное значение доли сбережения и постоянства доли расходования средств фонда по отношению к ВВП. Иными словами, в фонд в период его формирования должна поступать одна и та же доля ВВП, а в период его расходования государством должна изыматься из фонда одна и та же доля по отношению к ВВП.

Сформированный объем фонда государственных сбережений за t лет составит (в номинальном, реальном выражении и по отношению к ВВП):

$$S_t = d(1+\delta)^t [(1+r)^t - (1+g)^t];$$

$$W_t = d[(1+r)^t - (1+g)^t];$$

$$D_t = d \left[\frac{(1+r)^t}{(1+g)^t} - 1 \right] / (r - g).$$

Пусть D_c - объем средств, расходуемых из фонда государственных сбережений в течение одного года и выраженных по отношению к ВВП. Тогда D_c можно рассчитать с помощью формулы аннуитетного платежа следующим образом:

$$D_c = D_t (\dot{a} - 1) / (1 - \dot{a}^{-(t-1)}).$$

Вводя коэффициент $\bar{a} = (\dot{a} - 1) / (1 - \dot{a}^{-(t-1)})$, объем ежегодных изъятий средств из фонда государственных сбережений представим следующим образом:

$$D_c = \bar{a} D_t.$$

Коэффициент \bar{a} является коэффициентом "доли от доли" фонда государственных сбережений в ВВП.

В качестве примера рассмотрим следующий вариант. Пусть государство в течение 20 лет формирует фонд сбережений, перечисляя в него 5% от ВВП в условиях роста экономики 3,5% в год и реальной доходности инвестируемых сбережений в 4,5% годовых. Тогда сформированный фонд государственных сбережений составит по отношению к ВВП:

$$D_{20} = 0,05 \cdot \left[\frac{(1+0,035)((1+0,045)/(1+0,035))^{20} - 1}{(0,045 - 0,035)} \right] = 1,097.$$

Принимая начальное значение ВВП 100 млрд. денежных единиц (д.е.) (к году, предшествующему формированию фонда государственных сбережений) и уровня инфляции 3% годовых, можно рассчитать номинальный объем данного фонда к моменту завершения его формирования. Он равен:

$$S_{20} = 100 \text{ млрд. д.е.} \cdot 1,097 \times \\ \times (1+0,035)^{20}(1+0,03)^{20} = 394 \text{ млрд. д.е.,}$$

а реальный его объем (по отношению к ВВП года, предшествующего формированию государственных сбережений) составит:

$$W_{20} = 1,097 \cdot (1+0,035)^{20} = 2,18.$$

Теперь рассчитаем величину ежегодных расходов государства в течение 30 лет за счет сформированного им фонда сбережений до полного его исчерпания при тех же темпах роста экономики и той же доходности при инвестировании средств. Величина изъятий средств из фонда государственных сбережений по отношению к ВВП ежегодно должна составлять:

$$D_{30} = 1,097 \cdot (1,045/1,035)^{30}((1,045/1,035) - 1)/ \\ ((1,045/1,035)^{20} - 1) = 0,042.$$

Это означает, что государство, сберегая в течение 20 лет 5% ВВП, может в дальнейшем себе обеспечить поток дохода в течение 30 лет, равным 4,2% от ВВП. Заметим, что это будет больше, чем 1/30 от 1,097 ВВП, так как реальная ставка процента (r) в нашем примере больше, чем темпы роста экономики (g). В противном случае ($r < g$) доля изъятия средств была бы меньше,

чем 1/30 от 1,097 ВВП, а при равенстве r и g доля изъятий была бы равна 1/30 от 1,097 ВВП.

Зная объемы ежегодных изъятий из фонда государственных сбережений, можно рассчитать годовые суммы изъятий (S_{ct}) для каждого года:

$$S_{ct} = V_1 D_c (1+g)^t (1+\delta)^t,$$

или $S_{ct} = V_1 D_c (\dot{a} - 1) / (1 - \dot{a}^{-(t-1)})(1+g)^t (1+\delta)^t$, где V_1 - ВВП первого года расходования фонда государственных сбережений.

Например, в предыдущем примере для 10-го года расходования фонда государственных сбережений сумма изъятия из фонда должна составлять $S_{c10} = 100 \text{ млрд. д.е.} \cdot 0,042 \times \\ \times (1+0,035)^{20+10}(1+0,03)^{20+10} = 28,6 \text{ млрд. д.е.}$

Объем изъятых средств в реальном выражении (по отношению к реальному объему ВВП года, предшествующего формированию государственных сбережений), составит:

$$W_{ct} = D_c (1+g)^t,$$

$$\text{или } W_{ct} = D_c (\dot{a} - 1) / (1 - \dot{a}^{-(t-1)})(1+g)^t.$$

В нашем примере для 10-го года он составит $W_{c10} = 0,042 \cdot (1+0,035)^{20+10} = 0,118$, или 11,8% от ВВП _{$t=0$} .

Представленная выше математическая интерпретация государственных сбережений может быть использована в качестве расчета реалистичности различных вариантов и схем формирования и расходования фондов государственных сбережений в целях реализации экономической политики государства.

Поступила в редакцию 09.07.2009 г.