

## Моделирование роста лояльности клиентов

© 2009 М.В. Петров

©2009 А.Д. Чернявский

кандидат физико-математических наук

Нижегородский институт менеджмента и бизнеса

Рассмотрена модель изменения лояльности клиента в предположении, что субъективная полезность воспринимаемой информации о продукте определяет лояльность клиента данному продукту. В предположении закона убывающей предельной полезности и на основе численного моделирования определены требования к полезности информации, времени ее распространения для достижения эффективного продвижения продукта на рынке.

*Ключевые слова:* информация, распространение, моделирование, полезность, лояльность, маркетинг.

Лояльность потребителей исследуется прежде всего маркетологами, и причем достаточно интенсивно<sup>1</sup>. Этому есть веское объяснение: лояльность - ключ к росту и поддержанию высокого уровня продаж с минимальными затратами в дальнейшем.

Недостатком имеющихся работ можно считать отсутствие достаточно четких функциональных зависимостей лояльности, позволяющих оценить, прежде всего, эффективность дальнейших затрат на ее поддержание или дальнейший рост.

Целью данной работы является попытка моделирования на основе ограниченного количества исходных предпосылок, которые позволяют прийти к достаточно прозрачной временной зависимости лояльности потребителей от времени.

Линейная модель роста численности лояльных клиентов предполагается в виде:

$$\frac{dN}{dt} = P_1 \cdot \gamma \cdot P_2(N_0 - N), \quad (1)$$

где  $N$  - численность лояльно настроенных к фирме или ее продукту потребителей;

$N_0$  - общая численность рассматриваемой аудитории потребителей;

$P_1$  - объективная вероятность получения клиентом информации, формирующей его лояльность;

$\gamma$  - коэффициент передачи информации из внешней среды потребителя во внутреннюю;

$P_2$  - вероятность восприятия информации во внутренней среде потребителя как полезной.

Следующее допущение, которое мы будем использовать, - допущение о том, что лояль-

ность клиента пропорциональна полезности воспринятой им информации.

Линейная модель (1) соответствует ситуации, когда скорость роста численности лояльных клиентов пропорциональна численности еще не потребивших информацию о продукте клиентов.

Для внешней среды индивида считаем, что  $P_1$  зависит только от времени, т.е. потенциально полезная информация для индивида обладает свойством старения.

Считаем также, что информация распространяется в аудитории численностью  $N_0$  равномерно, т.е. плотность вероятности восприятия информации каждым индивидом  $f_1$ :

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{N_0}, \quad (2)$$

где  $f(z)$  - плотность вероятности для общего объема распространяемой в аудитории информации.

В предположении экспоненциального закона старения объективно полезной информации

$$f(t) = \mu_1 \exp(-\mu_1 t) \quad (3)$$

находим вероятность восприятия информации  $N$  индивидами:

$$P_1 = \frac{\mu_1 N}{N_0} \int_0^t \exp(-\mu_1 z) dz = \frac{N}{N_0} [1 - \exp(-\mu_1 t)] \quad (4)$$

Далее мы предполагаем, что на стадии насыщения полезной информацией индивида скорость роста полезности  $x$  будет уменьшаться пропорционально достигнутому объему:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{x}; (\lambda > 0). \quad (5)$$

Данное условие соответствует убывающей предельной полезности информации, т.е.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{x} \Delta t, \quad (6)$$

<sup>1</sup> Мифы о маркетинге и лояльности потребителей / Тимофи Л. Кейнингем, Терри Г. Вавра, Лержан Аксой, Генри Уоллард. М., 2007; Барнс Д. Путь к сердцу клиента. Стратегия отношений, когда лояльности мало. М., 2009; Носова Н.С. Лояльность клиентов, или Как удержать старых и привести новых клиентов. М., 2009.

и при одинаковых временных интервалах  $\Delta t$  приращение равно  $\Delta x = 1/x$ . Это условие соответствует традиционному экономическому закону убывающей предельной полезности продукта.

В дальнейшем воспользуемся следующим соотношением для плотности вероятности:

$$f(x) = f[t(x)] \cdot t'_x = f[t(x)] \cdot G'_x, \quad (7)$$

где  $t = G(x)$  - решение уравнения (5). В предположении  $x(0) = 0$ , что соответствует нулевой начальной полезности (информация неизвестна индивиду, и он не может выполнить ее оценку):

$$t(x) = \frac{x^2}{2\lambda}; t'_x = \frac{x}{\lambda}. \quad (8)$$

Далее считаем, что субъективная полезность информации во времени изменяется также по экспоненциальному закону аналогично (3):

$$f_2(t) = \mu_2 \exp(-\mu_2 t). \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9), находим:

$$f_2(x) = \frac{\mu_2}{\lambda} \exp\left(-\frac{\mu_2}{2\lambda} x^2\right) \cdot x. \quad (10)$$

Данное уравнение позволяет нам записать плотность вероятности в искомым переменных:

$$f_2(N) = \frac{\mu_2}{\lambda} \frac{N}{N_0^2} \exp\left(-\frac{\mu_2}{2\lambda} \frac{N^2}{N_0^2}\right). \quad (11)$$

Интегрируя (11), находим выражение для  $P_2$ :

$$P_2(N) = \int_0^N f_2(z) dz = 1 - \exp\left[-\xi_2 \left(\frac{N}{N_0}\right)^2\right], \quad (12)$$

где  $\xi_2 = \mu_2/2\lambda$ .

$$\frac{dn}{d\tau} = [1 - \exp(-\xi_1 \tau)] [1 - \exp(-\xi_2 n^2)] (1-n)n, \quad (13)$$

где  $\tau = \gamma t; \xi_1 = \mu_1/\gamma; \xi_2 = \mu_2/2\lambda; n = N/N_0$ .

Далее рассматриваем случай, согласующийся с условием  $\xi_1 \tau \gg 1$  или  $t \gg 1/\mu_1$ , что соответствует значению  $P_1 \approx 1$ , т.е. вся рассматриваемая аудитория получила исходную объективно полезную информацию извне. Это позволяет представить (13) в виде

$$\frac{dn}{d\tau} = [1 - \exp(-\xi_2 n^2)] (1-n)n. \quad (14)$$

В соответствии с нашим допущением, что субъективная полезность информации о продукте определяет уровень лояльности потребителя, можно говорить, что (14) определяет динамику изменения лояльности потребителей продукта.

Рассмотрим численное решение (14), для этого используем пакет программ MathCAD 14<sup>2</sup>. В качестве метода численного решения применен метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом, задаваемый функцией *rkfixed*(y0, t0, t1, M, D). Применение этого метода оправданно для случая "нежестких" дифференциальных уравнений. Рассчитанное поведение решения для ряда значений параметра  $\xi_2$  приведено на рис.1. При этом использованы условия  $n(0) = 0,01$ ;  $\xi_2 \in [10^2 \dots 10^4]$ . В качестве предельного случая рассмотрено чисто логистическое решение, соответствующее пренебрежению экспоненциальным членом в (14).

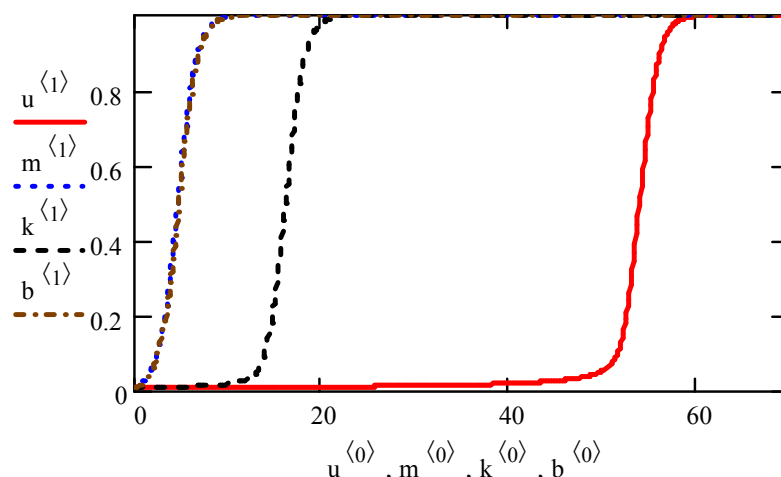


Рис. 1. Численное решение  $n(\tau)$  из (14):

$$u^{<1>} - \xi_2 = 10^2; k^{<1>} - \xi_2 = 4 \cdot 10^2; b^{<1>} - \xi_2 = 10^4; b^{<1>} - \xi_2 = \infty \text{ (логиста)}$$

Подставляя теперь  $P_1(N)$  из (4) и  $P_2(N)$  из (12) в (1), находим:

<sup>2</sup> Макаров Е. MathCAD (с CD-ROM). СПб., 2009.

Пренебрежение экспоненциальным членом в (14) определяет логистическую зависимость изменения лояльности. В соответствии с результатами численного моделирования это соответствует условию  $\xi_2 \geq 10^4$ . При этом решение для  $n(\tau)$  может быть записано в виде

$$n(\tau) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - n(0)}{n(0)}\right) e^{-\tau}}. \quad (15)$$

Условие насыщения  $n(\tau) \approx 1$  соответствует выполнению неравенства

$$\tau \gg \ln \left[ \frac{1 - n(0)}{n(0)} \right]. \quad (16)$$

Вернемся к нашему предельному случаю с  $\xi_2 \geq 10^4$ . Учитывая обозначение  $\xi_2 = \mu_2/2\lambda$ , а также то, что  $\mu_2 \approx 1/T_2$  - временной масштаб изменения функции плотности вероятности  $f_2(t)$ ;  $\lambda \approx 1/T_{\Pi}$  - временной масштаб изменения субъективной полезности, получим условие  $T_{\Pi} \geq 10^4 T_2$ . Таким образом, обязательным требованием перехода решения (14) к логистической кривой является гораздо больший временной масштаб изменения субъективной полезности по сравнению с временным масштабом спада функции плотности вероятности  $f_2(t)$ . Это условие в соответствии с нашими допущениями обеспечивает логистическую зависимость изменения лояльности потребителей во времени.

Если обратиться к логистической зависимости  $n(\tau)$  на рис. 2, то можно сказать следующее.

Это низкоэффективный участок, поскольку затраты, прежде всего на рекламу, не будут моментально окупаться. Однако без этого участка не может быть дальнейшего продвижения вперед.

Средний участок кривой, обозначенный В-С, характеризуется быстрым ростом  $n(\tau)$  и, соответственно, лояльности потребителя. Именно этот участок считается наиболее эффективным с точки зрения увеличения лояльности клиентов.

Участок насыщения С-Д характеризуется низким приростом численности лояльных клиентов. Оказавшись на этом участке, фирма должна четко представлять, что стратегия ее маркетинга должна переходить от расширения рынка к удержанию доли рынка. Попытки дальнейшего расширения доли рынка будут уже неэффективными вследствие несоответствия роста затрат и численности лояльных клиентов.

Примером, подтверждающим логистическую зависимость лояльности от численности потребителей, может служить работа<sup>3</sup>. На основе статистического анализа лояльности абонентов на рынке услуг сотовой связи г. Ярославля построена зависимость доли рынка от лояльности потребителей (в наших координатах  $n - \tau$ ), близкая к участку А-В-С логистической кривой при варьировании доли рынка компании от 15 до 45%.

В наших координатах  $n - \tau$  (рис. 2) видно, что переход к участку С-Д не принесет нам существенного приращения количества лояльных клиентов.

С учетом изложенного можно говорить о динамической концепции завоевания рынка. Она соответствует движению на участке А-В-С (см. рис. 2). Попытка переместиться далее по кривой на участке С-Д приводит к неоправданному росту за-

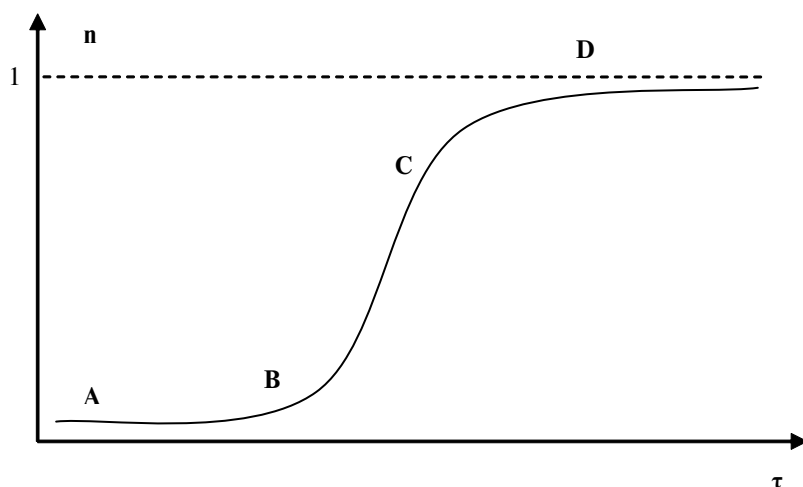


Рис. 2. Графическая зависимость изменения лояльности потребителя во времени

Начальный участок А-В характеризуется медленным нарастанием лояльности потребителей.

<sup>3</sup> Карасев А.П. Разработка факторной модели лояльности для рынка услуг сотовой связи // Маркетинг и маркетинговые исследования. 2008. □ 2.

трат на привлечение новых клиентов, и их совокупная лояльность возрастает незначительно. Косвенно об этом можно судить и по тому факту, что рост лояльности стимулирует рост продаж. В работе<sup>4</sup> проведен анализ роста уровня спроса от уровня маркетинговых затрат.

Подведем итоги исследования.

1. Рассмотрена модель временной зависимости роста численности потенциальных потребителей продукта на рынке в зависимости от времени. Основные использованные допущения:

- старение полученной потребителем информации происходит по экспоненциальному закону, что использовано для задания функций плотности вероятности объективной и субъективной вероятности восприятия информации потребителем;

- субъективная полезность воспринимаемой потребителем информации в единицу времени подчиняется закону убывающей предельной полезности;

- лояльность потребителя пропорциональна субъективной полезности воспринимаемой им информации.

2. На основании этих допущений построена модель роста численности лояльно настроенных потребителей от времени. В общем случае она описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка.

3. Выполнено численное решение полученного уравнения для роста численности лояльно настроенных потребителей информации о продукте, которое позволяет определить границы предельного перехода к логистической кривой роста.

В общем случае зависимость временного роста численности лояльно настроенных потребителей более подходит к случаю так называемого “вирусного” маркетинга: длительный период скрытого развития процесса с малым приростом численности и затем почти взрывной характер нарастания численности лояльно настроенных потребителей.

В качестве предельного перехода к логистической кривой, характеризующейся гораздо меньшим временем скрытого развития процесса, найдено условие

$$\xi_2 = \frac{T_{II}}{2T_2} \geq 10^4,$$

где  $T_{II}$  - временной масштаб изменения субъективной полезности воспринимаемой информации;

$T_2$  - временной масштаб изменения функции плотности вероятности субъективной полезности воспринимаемой информации.

Данное требование означает, что в предположении закона убывающей предельной полезности за время спада функции плотности вероятности субъективной полезности изменения субъективной полезности информации еще не происходит. Выделение этих двух временных масштабов  $T_{II}$  и  $T_2$  является следствием применения предложенной методики. Ее достоинство - она позволяет рассмотреть влияние каждого из рассмотренных факторов по отдельности.

4. Полученная зависимость кривой роста лояльности как в случае логистической зависимости, так и в более общем случае показывает, что существуют три различных области лояльности:

- начальная область, или область “инкубационного” периода, соответствует участку А-В (см. рис. 2) и характеризуется низкой эффективностью (затраты/прирост численности);

- участок роста В-С - скорость роста численности лояльных потребителей увеличивается, что соответствует повышению эффективности привлечения потребителей;

- участок насыщения (спада темпа роста) С-Д соответствует полному заполнению рыночного сегмента. Эффективность на этой стадии вновь резко снижается.

Для решения в общем случае ( $\xi_2 < 10^4$ ) данные стадии сохраняются, но стадия “инкубационного” развития значительно увеличивается. Это дает возможность считать, что здесь реализуется ситуация роста потребителей, характерная для так называемого “вирусного” маркетинга.

5. Наличие чередующихся участков скорости роста лояльности потребителей позволяет предложить динамическую модель управления лояльностью. Она соответствует возможно быстрому прохождению “инкубационного” участка роста лояльности и определения приемлемой точки на участке с высоким темпом роста лояльности (т.е. доли сегмента рынка). При этом удержание ситуации с ростом лояльности потребителей вблизи данной точки и обеспечивает наиболее эффективную стратегию позиции поддержания отношения “затраты/прирост численности лояльных потребителей”.

Поступила в редакцию 12.01.2009 г.

<sup>4</sup> Дятлов А.Н., Артамонов С.Ю. Оптимизация маркетингового бюджета фирмы с использованием моделей S-образных кривых функции спроса // Экон. журн. ВШЭ. 1999. □ 4.