Оптимальная стратегия возмещения стоимости лизингового имущества

© 2009 О.В. Павлов, Е.А. Фудобина
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева

Рассматривается типичная ситуация, когда комиссионное вознаграждение начисляется на неоплаченную стоимость лизингового имущества. В этом случае сумма лизинговых платежей является переменной величиной, зависящей от интенсивности возмещения стоимости имущества. Задача формулируется как задача оптимального управления. С использованием принципа максимума Понтрягина определяется оптимальная стратегия управления интенсивностью лизинговых платежей. Найдены экономические условия, которые определяют выбор стратегии возмещения стоимости лизингового имущества.

Ключевые слова: лизинговые платежи, возмещение стоимости лизингового имущества, задача оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, оптимальное время переключения, экономические условия.

1. Постановка задачи оптимального управления лизинговыми платежами

Сумма лизинговых платежей является важнейшим критерием оценки доходности для лизингодателя и лизингополучателя. Рассматривается типичная ситуация, когда комиссионное вознаграждение лизингополучателю начисляется на неоплаченную стоимость имущества. В этом случае сумма лизинговых платежей является переменной величиной, зависящей от интенсивности возмещения стоимости имущества[1]. В статье рассматривается задача нахождения оптимальной стратегии выплаты платежей лизингополучателем. Динамика изменения неоплаченной стоимости лизингового имущества $x(t)$ описывается дискретным уравнением

$$x(t+1) = x(t) + rx(t) - u(t), \quad t = 0, N , \qquad (1)$$

где $u(t)$ - размер ежемесячного лизингового платежа;
t - номер периода лизингового платежа;
r - ставка комиссионного вознаграждения за период t;
$rx(t-1)$ - проценты за период t;
N - общее количество лизинговых платежей.

В начальный период неоплаченная стоимость лизингового имущества равна всей стоимости имущества:

$$x(0) = K . \qquad (2)$$

В конечный период вся стоимость лизингового оборудования должна быть выплачена:

$$x(N) = 0 . \qquad (3)$$

В уравнении (1) $x(t)$ является фазовой координатой, $u(t)$ - управлением лизингополучателя, подчиненным ограничению:

$$b^{\min}(t) \le u(t) \le b^{\max}(t) , \qquad (4)$$

где $b^{\min}(t)$, $b^{\max}(t)$ - соответственно, минимально и максимально возможные лизинговые платежи в интервал времени t.

Максимально возможный лизинговый платеж определяется финансовым состоянием лизингополучателя. Минимально возможный платеж должен быть больше, чем начисляемые проценты на неоплаченную стоимость лизингового имущества в этот период. В противном случае неоплаченная стоимость лизингового имущества будет возрастать.

В качестве критерия лизингополучателя выберем минимизацию дисконтированной суммы лизинговых платежей:

$$\sum_{t=0}^{N} \frac{1}{(1+E)^t} u(t) \to \min, \qquad (5)$$

где E - ставка дисконтирования.

Задача оптимального управления состоит в нахождении такого управления $u(t)$ (стратегии выплат лизингополучателем), подчиненного ограничению (4), которое переводит дискретную систему (1) из начального состояния (2) в конечное (3), минимизируя критерий оптимальности (5).

Рассмотрим непрерывный вариант сформулированной дискретной модели. Из дискретного уравнения (1) найдем приращение неоплаченной стоимости лизингового имущества за временной отрезок Δt:

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t - u(t)\Delta t.$$

Разделив обе части уравнения на Δt и перейдя к пределу $\Delta t \to 0$, получим дифференци-

[1] *Киркоров А.Н.* Управление финансами лизинговой компании. М., 2006.

альное уравнение динамики изменения неоплаченной стоимости лизингового имущества:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) - u(t). \tag{6}$$

С граничными условиями:

$$x(0) = K_0.$$
$$x(T) = 0, \tag{7}$$

где T - срок действия лизингового договора.

Критерий лизингополучателя примет вид:

$$J = \int_0^T u(t)e^{-\delta t}dt \to \min. \tag{8}$$

Таким образом, соотношения (4), (6-8) определяют задачу оптимального управления непрерывной системой.

2. Решение задачи оптимального управления лизинговыми платежами

Решим поставленную задачу оптимального управления (6-8) с помощью принципа максимума Понтрягина[2]. Запишем гамильтониан:

$$H(t) = \psi(t)[rx(t) - u(t)] - u(t)e^{-\delta t}. \tag{9}$$

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления:

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} b^{\max}(t), & если\ \ \psi(t) + e^{-\delta t} \le 0, \\ b^{\min}(t), & если\ \psi(t) + e^{-\delta t} > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Запишем уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -r\psi(t).$$

Сопряженное уравнение интегрируется независимо от исходного уравнения (6). Решая сопряженное уравнение, получим:

$$\psi(t) = Ce^{-rt}, \tag{11}$$

где C - постоянная интегрирования.

Соответственно, выражение для оптимального управления примет вид:

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} b^{\max}(t), & если\ Ce^{-rt} + e^{-\delta t} \le 0, \\ b^{\min}(t), & если\ Ce^{-rt} + e^{-\delta t} > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) следует, что если на начальном участке траектории функция $f(t) = Ce^{-rt} + e^{-\delta t}$ положительна, то она будет положительной на всей траектории, так как функции e^{-rt} и $e^{-\delta t}$ являются положительными. Следовательно, на всей траектории будет только одно управление $u_{opt}(t) = b^{\min}(t)$, а это не гарантирует в конечный момент времени выполнения граничного условия $x(T) = 0$. В случае если на начальном участке траектории функция $f(t) = Ce^{-rt} + e^{-\delta t}$ отрицательна, то возможно изменение знака этой функции и, следовательно, переключение управления с $u_{opt}(t) = b^{\max}(t)$ на $u_{opt}(t) = b^{\min}(t)$. В этом случае возможно выполнение граничного условия. Таким образом, полученное оптимальное управление имеет релейный вид: на начальном участке траектории, до достижения времени переключения t^* лизингополучателю выгодно совершать лизинговые выплаты как можно большего размера $u_{opt}(t) = b^{\max}(t)$, а затем минимального размера $u_{opt}(t) = b^{\min}(t)$:

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} b^{\max}(t), & если\ 0 \le t \le t^*, \\ b^{\min}(t), & если\ t^* < t \le T. \end{cases}$$

3. Решение задачи оптимального управления в случае постоянных лизинговых платежей

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (6) в случае постоянных лизинговых платежей. В этом случае ограничение на управление запишется $b^{\min} \le u(t) \le b^{\max}$. Начальному интервалу времени $0 \le t \le t^*$, на котором постоянные лизинговые платежи максимальны $u(t) = b^{\max}$, соответствует траектория, получаемая из решения дифференциального уравнения (6):

$$\frac{dx}{dt} = rx - b^{\max}.$$

Проведем разделение переменных:

$$\frac{dx}{rx - b^{\max}} = dt.$$

Выполним интегрирование:

$$\frac{1}{r}\ln\left|rx - b^{\max}\right| = t + C_1.$$

Получим решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = Ce^{rt} + \frac{b^{\max}}{r}.$$

Из начальных условий $x(0) = K_0$ найдем постоянную интегрирования:

---

[2] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М., 1983.

$$C = K_0 - \frac{b^{\max}}{r}.$$

Окончательно получим траекторию невыплаченной стоимости лизингового имущества, выходящую из точки $(0, K_0)$ (начальный отрезок траектории) и соответствующую максимальным лизинговым выплатам:

$$x^н(t) = \left[K_0 - \frac{b^{\max}}{r}\right]e^{rt} + \frac{b^{\max}}{r}. \qquad (13)$$

Таким образом, (13) определяет семейство экспонент, выходящих из точки $(0, K_0)$. Семейство экспонент изображено на рис. 1.

Аналогично определим траекторию для конечного интервала времени $t^* < t \le T$, на котором постоянные лизинговые платежи минимальны $u(t) = b^{\min}$:

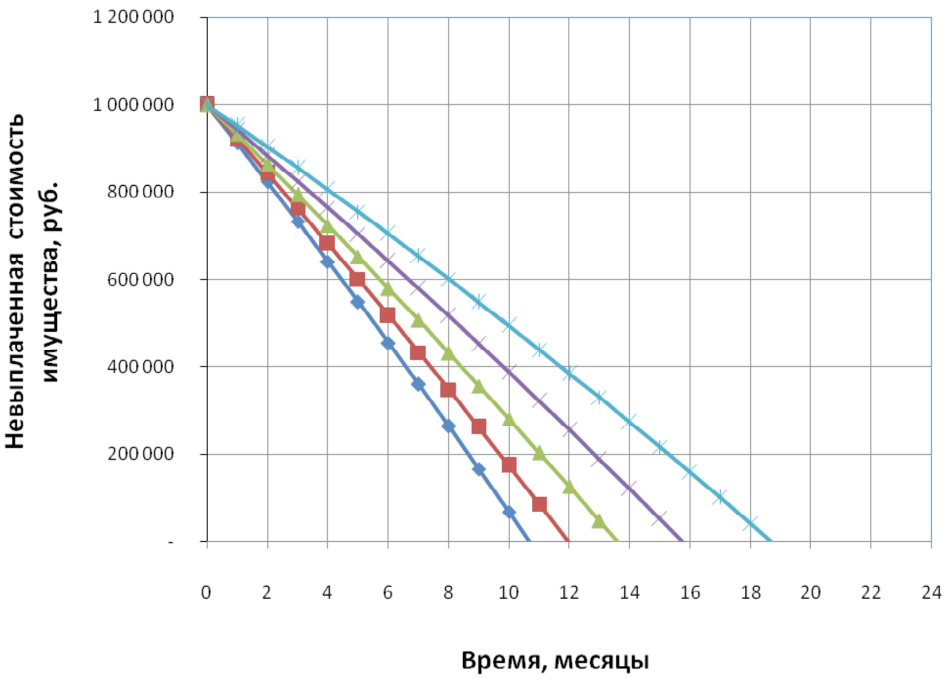

Рис. 1

$$\frac{dx}{dt} = rx - b^{\min}.$$

Решение дифференциального уравнения запишется:

$$x(t) = Ce^{rt} + \frac{b^{\min}}{r}.$$

Постоянную интегрирования найдем из конечного граничного условия $x(T) = 0$:

$$C = -\frac{b^{\min}}{r}e^{-rT}.$$

Окончательное решение дифференциального уравнения:

$$x^k(t) = \frac{b^{\min}}{r}\left[1 - e^{r(t-T)}\right]. \qquad (14)$$

Формула (14) определяет семейство экспонент, выходящих из точки $(T, 0)$. Семейство экспонент показано на рис. 2.

Время переключения управления определится в результате пересечения начального и конечного участков траекторий. Приравнивая уравнения (13) и (14), найдем время переключения t^*:

$$t^* = \frac{1}{r}\ln\left[\frac{b^{\min} - b^{\max}}{K_0 r - b^{\max} + \dfrac{b^{\min}}{e^{rT}}}\right]. \qquad (15)$$

Рассмотрим численный пример. Условия лизингового договора: стоимость лизингового имущества - 1 000 000 руб.; срок договора - 24 мес.; ставка комиссионного вознаграждения - 12%, проценты начисляются ежемесячно. Лизинговым договором установлен минимальный ежемесячный платеж: $b^{\min}$ = 30 000 руб. Лизингополучатель может выплачивать не больше 60 000 руб. в месяц: $b^{\max}$ = 60 000 руб. Решение задачи оптимального управления лизинговыми платежами представлено на рис. 3. По формуле

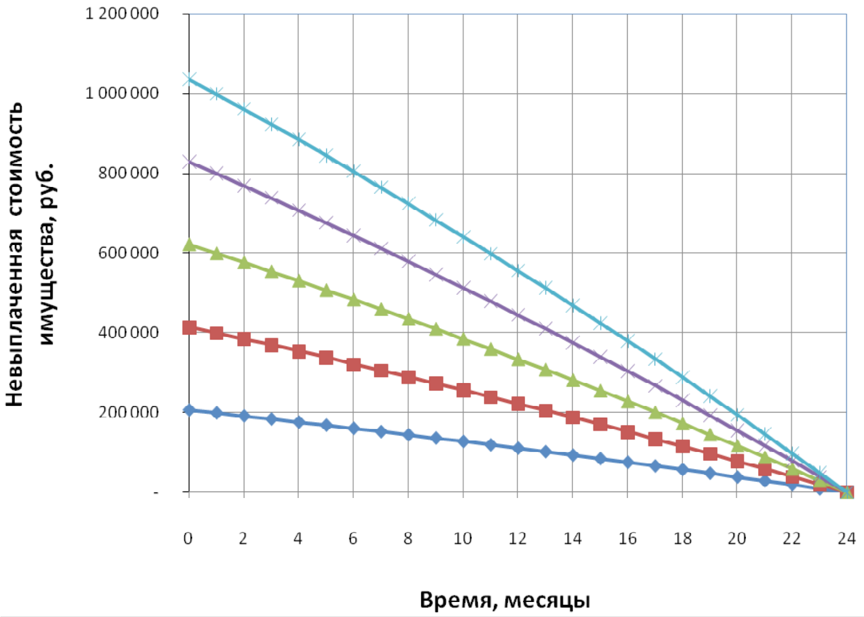

Рис. 2

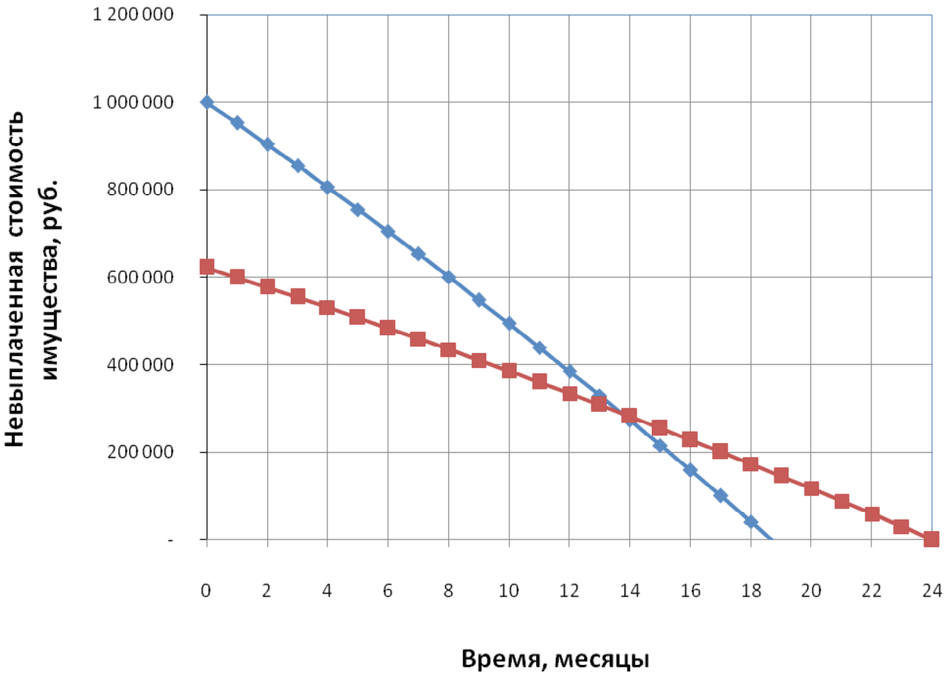

Рис. 3

(15) найдем оптимальное время переключения $t^* = 13{,}7$ мес.

4. Решение задачи оптимального управления лизинговыми платежами, в которой время выплаты долга не фиксировано заранее

Рассмотрим важный частный случай, когда время выплаты стоимости лизингового оборудования не фиксировано заранее. В этом случае должно выполняться дополнительное условие, согласно которому гамильтониан в конечный момент времени должен быть равен нулю[3]:

$$H(T) = \psi(T)[rx(T) - u(T)] - u(T)e^{-\delta T} = 0\,.$$

Учитывая, что в конечный момент времени $x(T) = 0$, получим:

$$u(T)\left[\psi(T) + e^{-\delta T}\right] = 0\,.$$

Уравнение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю:

[3] Математическая теория оптимальных процессов.

$$\psi(T) + e^{-\delta T} = 0 \text{ или } u(T) = 0.$$

Так как управление не может быть равным нулю, выбираем равенство

$$\psi(T) + e^{-\delta T} = 0. \qquad (16)$$

Перепишем уравнение (14) с учетом (11):

$$Ce^{-rT} + e^{-\delta T} = 0 \cdot$$

Найдем постоянную интегрирования *C*:

$$C = -e^{T(r-\delta)}. \qquad (17)$$

Подставим (17) в (12), найдем оптимальное управление в случае, когда время выплаты долга не фиксировано:

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} b^{\max}(t), \text{ если } e^{-rt}\left[e^{(r-\delta)t} - e^{(r-\delta)T}\right] \le 0, \\ b^{\min}(t), \text{ если } e^{-rt}\left[e^{(r-\delta)t} - e^{(r-\delta)T}\right] > 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Неравенство $e^{-rt}\left[e^{(r-\delta)t} - e^{(r-\delta)T}\right] \le 0$ будет выполняться, если выполняется условие $r - \delta \ge 0$, в этом случае выражение в скобках будет не положительным, так как $t \le T$. И наоборот, неравенство не будет выполняться, если выполняется условие $r - \delta < 0$. Поэтому формулы (18) возможно переписать в следующем виде:

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} b^{\max}(t), \text{ если } r \ge \delta, \\ b^{\min}(t), \text{ если } r < \delta. \end{cases} \qquad (19)$$

Таким образом, если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя (аналог процентной ставки) больше, чем ставка дисконтирования $r > \delta$, оптимальной стратегией лизингополучателя являются лизинговые выплаты как можно большего размера до полного погашения стоимости лизингового имущества. Если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя меньше, чем ставка дисконтирования $r < \delta$, то оптимальной стратегией лизингополучателя являются лизинговые выплаты как можно меньшего размера.

Поступила в редакцию 12.01.2009 г.