Оптимальное управление инвестициями в проекте промышленного предприятия

© 2009 О.В. Павлов, Т.А. Мошкова
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева

Рассматривается задача управления инвестициями в проекте промышленного предприятия. Задача формулируется как задача оптимального управления дискретной системой. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина определяется оптимальная стратегия управления инвестициями. Получено оптимальное время прекращения инвестиций, и найдены оптимальные условия для инвестирования. На основе этих условий сформулированы критерии для принятия решения об инвестировании средств в проект.

Ключевые слова: инвестиционный проект, управление инвестициями, задача оптимального управления, дискретный принцип максимума Понтрягина, оптимальное время начала и прекращения инвестиций, критерии для принятия решения об инвестировании.

1. Дискретная модель денежных потоков инвестиционного проекта

Время существования нового продукта на рынке (жизненный цикл) укрупненно состоит из четырех этапов: выход на рынок, рост спроса, насыщение рынка, падение спроса. В соответствии с этим денежный поток, генерируемый инвестиционным проектом, вначале возрастает, затем стабилизируется и, наконец, уменьшается. Поэтому актуальной является задача определения оптимального времени начала инвестиций, их объема, времени прекращения инвестиций в новый продукт на выбранном горизонте планирования. Задачи управления инвестициями в непрерывной постановке рассматривались в работах В. Горелика, А.Ф. Кононенко, Ю.В. Косачева[1], однако для практических экономических расчетов более предпочтительным является решение задачи в дискретной виде.

Предполагается, что промышленное предприятие является единственным участником инвестиционного проекта по производству нового вида продукции. Инвестиции осуществляются за счет собственных средств предприятия из чистой прибыли и амортизационных отчислений. Экономическая эффективность проекта оценивается в целом, и схема финансирования инвестиционного проекта не учитывается. В этом случае рассчитываются денежные потоки только от операционной (производственной) и инвестиционной деятельности[2]. Количество производимой продукции предприятием равно прогнозируемому объему продаж.

Чистый денежный поток инвестиционного проекта (*Net Cash Flow*) $NCF(t)$ в интервале времени t (шаге расчетного периода) определяется как разность денежных потоков от операционной деятельности (*Operating Cash Flow*) $OCF(t)$ и инвестиционной (*Investment*) $I(t)$:

$$NCF(t) = OCF(t) - I(t), \quad t = 1, N, \qquad (1)$$

где N - число шагов расчетного периода инвестиционного проекта.

Денежный поток от операционной деятельности рассчитывается:

$$OCF(t) = (1 - \tau_s)SV(t) - NOC(t) - PT(t), \qquad (2)$$

где $SV(t)$ - объем реализации (*Sales Volume*) произведенной продукции;

τ_s - ставка налога на добавленную стоимость;

$NOC(t)$ - чистые операционные издержки (*Net Operating Costs*);

$PT(t)$ - налог на прибыль (*Profit Tax*).

Объем реализации от продаж произведенной продукции определяется:

$$SV(t) = P(t)Q(t), \qquad (3)$$

где $P(t)$ - цена продукции;

$Q(t)$ - количество проданной продукции.

Предприятия отражают в бухгалтерском учете пять элементов операционных затрат: материальные затраты $MC(t)$ (*Material Costs*), заработную плату $WS(t)$ (*Wages and Salary*), начисления на заработную плату $WC(t)$ (*Wages Charges*),

[1] *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М., 1982; *Косачев Ю.В.* Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. М., 2004.

[2] *Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика: Учеб. пособие. М., 2004.

амортизацию $DEP(t)$ (*Depreciation*), прочие затраты $OC(t)$ (*Other Costs*). Однако амортизационные начисления не генерируют денежный поток, так как они остаются в распоряжении предприятия, поэтому будем учитывать данные затраты только при расчете налога на прибыль.

Чистые операционные издержки состоят из следующих элементов:

$$NOC(t) = MC(t) + WS(t) + WC(t) + OC(t). \quad (4)$$

Материальные затраты рассчитываются:

$$MC(t) = c_M(t)Q(t), \quad (5)$$

где $c_M(t)$ - удельные материальные затраты.

Заработная плата определяется:

$$WS(t) = w_v(t)L_v(t) + w_f(t)L_f(t), \quad (6)$$

где $L_v(t)$ - численность производственного персонала, пропорциональная объему производства;

$L_f(t)$ - численность, не изменяющаяся в зависимости от объема производства;

$w_f(t)$, $w_v(t)$ - средняя ставка заработной платы условно-постоянной и переменной частей персонала.

Переменная часть персонала определяется:

$$L_v = l(t)Q(t), \quad (7)$$

где $l(t)$-количество персонала, необходимого для выпуска единицы продукции.

Начисления на заработную плату рассчитываются:

$$WC(t) = \tau_w WS(t), \quad (8)$$

где τ_w - ставка единого социального налога.

К прочим затратам относятся затраты на коммунальные услуги, арендную плату, затраты на маркетинг, рекламу, сбыт продукции.

Запишем выражение для издержек (4) с учетом (5) - (8):

$$NOC(t) = Q(t)\{c_M(t) + (1+\tau_w)w_v(t)l(t)\} +$$
$$+ (1+\tau_w)w_f(t)L_f + OC(t).$$

Перепишем чистые операционные издержки в следующем виде:

$$NOC(t) = Q(t)c(t) + FC(t), \quad (9)$$

где $c(t)$ - удельные переменные затраты;

$FC(t)$ - постоянные затраты.

Удельные переменные затраты рассчитываются по формуле

$$c(t) = c_M(t) + (1+\tau_w)w_v(t)l(t).$$

Постоянные затраты определяются:

$$FC(t) = (1+\tau_w)w_f(t)L_f + OC(t). \quad (10)$$

Налог на прибыль рассчитывается:

$$PT(t) = \tau_c\{SV(t)(1-\tau_s) - NOC(t) - DEP(t)\}, \quad (11)$$

где τ_c - ставка налога на прибыль;

$DEP(t)$ - амортизационные начисления.

Для расчета износа основных средств предприятия $K(t)$ используется метод равномерного начисления амортизации:

$$DEP(t) = \mu K(t), \quad (12)$$

где μ - норма амортизации.

Подставим в формулу (2) выражение (11):

$$OCF(t) = (1-\tau_c)\{SV(t)(1-\tau_s) -$$
$$- NOC(t) - DEP(t)\} + DEP(t). \quad (13)$$

Процесс производственной деятельности предприятия описывается производственной функцией Леонтьева:

$$Q(t) = f(t)K(t), \quad (14)$$

где $f(t)$ - фондоотдача основных средств предприятия.

С учетом (9), (12), (14) выражение для денежного потока от операционной деятельности запишется:

$$OCF(t) = [a(t) + \mu]K(t) - (1-\tau_c)FC(t), \quad (15)$$

где коэффициент $a(t)$ определяется:

$$a(t) = (1-\tau_c)\{f(t)[P(t)(1-\tau_s) - c(t)] - \mu\}. \quad (16)$$

В экономическом смысле коэффициент $a(t)$ определяет получаемую промышленным предприятием прибыль с единицы изделия, без учета постоянных затрат. Этот коэффициент характеризует рентабельность производства нового вида продукции на кривой жизненного цикла.

Инвестиционные затраты $I(t)$ идут на создание или прирост основных средств $K(t)$ и изменение оборотного капитала, *(Net Working Capital)* $\Delta NWC(t)$:

$$I(t) = I_K(t) + \Delta NWC(t), \quad (17)$$

где $I_K(t)$ - инвестиции в основные средства предприятия.

Потребность в оборотном капитале определяется:

$$\Delta NWC(t) = \Delta NWC_M(t) + \Delta NWC_C(t) +$$
$$+ \Delta NWC_Q(t) + \Delta NWC_D(t) + \Delta NWC_K(t), \quad (18)$$

где $\Delta NWC_M(t)$ -изменение оборотного капитала для увеличения запасов сырья и материалов;

$\Delta NWC_C(t)$ - для незавершенного производства;

$\Delta NWC_Q(t)$ - для готовой продукции;

$\Delta NWC_D(t)$ -для дебиторской задолженности;

$\Delta NWC_K(t)$ - для краткосрочной кредиторской задолженности.

Потребность в оборотном капитале для увеличения запасов сырья и материалов запишется:

$$\Delta NWC_M(t) = \left[MC(t) - MC(t-1)\right]\frac{TP_M}{PI} =$$

$$= \Delta Q(t)c_M(t)\frac{TP_M}{PI}, \qquad (19)$$

где TP_M - период оборота (*Turnover Period*) сырья и материалов, дн.;

PI - продолжительность шага расчетного периода *t (Planning Interval),* дн.

Потребность в оборотном капитале для незавершенного производства:

$$\Delta NWC_C(t) = \left[VC(t) - VC(t-1)\right]\frac{TP_C}{PI} =$$

$$= \Delta Q(t)c(t)\frac{TP_C}{PI}, \qquad (20)$$

где TP_C - период оборота активов незавершенного производства, дн.

Потребность в оборотном капитале для готовой продукции:

$$\Delta NWC_Q(t) = \left[NOC(t) - NOC(t-1)\right]\frac{TP_Q}{PI} =$$

$$= \Delta Q(t)c(t)\frac{TP_Q}{PI}, \qquad (21)$$

где TP_Q - период оборота готовой продукции на складе, дн.

Потребность в оборотном капитале для дебиторской задолженности:

$$\Delta NWC_D(t) = \left[SV(t) - SV(t-1)\right]\frac{TP_D}{PI} =$$

$$= \Delta Q(t)P(t)\frac{TP_D}{PI}, \qquad (22)$$

где TP_D - период оборота активов дебиторской задолженности, дн.

Для краткосрочной кредиторской задолженности:

$$\Delta NWC_K(t) = \left[NOC(t) - NOC(t-1)\right]\frac{TP_K}{PI} =$$

$$= \Delta Q(t)c(t)\frac{TP_K}{PI}, \qquad (23)$$

где TP_K - период оборота активов краткосрочной кредиторской задолженности, дн.

Подставляя (19) - (23) в выражение (18), получим:

$$\Delta NWC(t) = \Delta Q(t)\frac{1}{PI}\Big\{c_M(t)TP_M +$$

$$+ c(t)\left[TP_C + TP_Q - TP_K\right] + P(t)TP_D\Big\}. \qquad (24)$$

С учетом (14) формула (24) запишется:

$$\Delta NWC(t) = \Delta K(t)\lambda(t), \qquad (25)$$

где параметр $\lambda(t)$ определяется:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{PI}\Big\{c_M(t)TP_M +$$

$$+ c(t)\left[TP_C + TP_Q - TP_K\right] + P(t)TP_D\Big\}.$$

Динамика изменения стоимости основных средств предприятия описывается дискретным уравнением:

$$K(t) = K(t-1) + I_K(t), \quad t = 1, N. \qquad (26)$$

Из (26) следует, что изменение основных средств предприятия определяется:

$$\Delta K(t) = I_K(t). \qquad (27)$$

Подставим (27) в формулу для изменения оборотного капитала (25):

$$\Delta NWC(t) = \lambda(t)I_K(t). \qquad (28)$$

С учетом (17) и (28) модель чистого денежного потока (1) запишется:

$$NCF(t) = OCF(t) - \left[1 + \lambda(t)\right]I_K(t). \qquad (29)$$

2. Постановка задачи оптимального управления инвестициями

Сформулируем задачу управления инвестициями как задачу оптимального управления дискретной системой. В качестве управления $\alpha(t)$ примем долю от операционного денежного потока, полученного предприятием в интервале времени (t-1):

$$I_K(t) = \alpha(t)OCF(t-1).$$

Тогда дискретное уравнение (26) запишется:

$$K(t) = K(t-1) + \alpha(t)OCF(t-1). \qquad (30)$$

С начальным условием $K(0) = K_0$. (31)

На управление $\alpha(t)$ наложено следующее ограничение:

$$0 \le \alpha(t) \le 1 . \tag{32}$$

Если весь денежный поток направляется на инвестиции, то $\alpha(t) = 1$; если не направляется, то $\alpha(t) = 0$.

В качестве критерия оценки экономической эффективности проекта рассматривается чистый приведенный доход (*Net Present Value)*:

$$NPV = \sum_{t=1}^{N} \frac{NCF(t-1)}{(1+E)^t},$$

где E - ставка дисконтирования.

С учетом (29) выражение для чистого приведенного дохода запишется:

$$NPV = \sum_{t=1}^{N} \frac{\{1 - [1 + \lambda(t-1)]\alpha(t)\} OCF(t-1)}{(1+E)^t} \to \max . \tag{33}$$

Сформулируем задачу оптимального управления: зная начальное состояние основных средств промышленного предприятия (31), необходимо выбрать такое допустимое управление инвестициями (32), чтобы чистый приведенный доход предприятия (33) на конечном шаге расчета N принял максимальное значение.

3. Решение задачи оптимального управления инвестициями

Применим для решения задачи дискретный принцип максимума Понтрягина[3]. Запишем гамильтониан:

$$H(t) = \left\{ \Psi(t) - \frac{(1 + \lambda(t-1))}{(1+E)^t} \right\} \alpha(t) OCF(t-1) +$$

$$+ \Psi(t) K(t-1) + \frac{OCF(t-1)}{(1+E)^t}.$$

Из условия максимума гамильтониана определяется структура оптимального управления, при условии положительности денежного потока от операционной деятельности $OCF(t-1) > 0$:

$$\alpha^{opt}(t) = \begin{cases} 1, \; если \; \Psi(t) - \dfrac{1 + \lambda(t-1)}{(1+E)^t} \ge 0; \\ 0, \; если \; \Psi(t) - \dfrac{1 + \lambda(t-1)}{(1+E)^t} < 0. \end{cases} \tag{34}$$

Уравнение для сопряженной системы запишется:

$$\Psi(t-1) = \frac{\partial H(t)}{\partial K} = \Psi(t) + [a(t-1) +$$

$$+ \mu] \left\{ \Psi(t) \alpha(t) + \frac{1 - [1 - \lambda(t-1)] \alpha(t)}{(1+E)^t} \right\}. \tag{35}$$

Из условия трансверсальности $\Psi(N) = 0$ следует $\alpha(N) = 0$.

Обозначим через t^* шаг переключения управления $\alpha^{opt}(t)$ и рассмотрим дискретное уравнение (35) на интервале от N до t^* при управлении $\alpha^{opt}(t) = 0$. Дискретное уравнение (35) примет вид

$$\Psi(t-1) = \Psi(t) + \frac{a(t-1) + \mu}{(1+E)^t}. \tag{36}$$

При граничном условии $\Psi(N) = 0$.

Для определения оптимального управления инвестициями предлагается следующий численный алгоритм:

1) рассчитывается по формуле (36) сопряженная переменная $\Psi(t-1)$ на интервале от N до 0;

2) определяется оптимальное управление по формуле (34).

В результате расчетов определится оптимальное время прекращения инвестиций t^* в рассматриваемый проект. В случае, если в результате расчетов оптимальное управление инвестициями на всей траектории будет равно нулю, рассматриваемый проект необходимо отклонить. Возможна ситуация, когда на начальных интервалах оптимальное управление инвестициями будет равно нулю, а затем из-за изменения экономических параметров проекта, например роста цены на продукцию или снижения себестоимости, будет отлична от нуля. В этом случае в результате расчетов определится оптимальное время начала осуществления инвестиционного проекта.

4. Аналитическое определение времени прекращения инвестиций

В частном случае, когда прибыль, получаемая с единицы изделия, постоянна в каждом интервале времени $a(t) = a = const$, возможно аналитическое определение времени прекращения инвестиций. Уравнение для сопряженной переменной (36) запишется:

[3] *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М., 1973.

$$\Psi(t-1) = \Psi(t) + \frac{a+\mu}{(1+E)^t} \cdot \qquad (37)$$

При граничном условии $\Psi(N) = 0$.

С учетом граничного условия формула для сопряженной переменной может быть записана:

$$\Psi(t) = \frac{a+\mu}{(1+E)^t}\left[1 + \frac{1}{1+E} + \frac{1}{(1+E)^2} + \frac{1}{(1+E)^3} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{(1+E)^{N-t-1}}\right].$$

Выражение в скобках является суммой геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии $\frac{1}{1+E}$ и количеством членов прогрессии, равным N-t.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим следующее выражение для сопряженной переменной:

$$\Psi(t) = \frac{a+\mu}{E}\left[\frac{1}{(1+E)^t} + \frac{1}{(1+E)^N}\right].$$

В данном случае оптимальное управление инвестициями примет вид

$$\alpha^{opt}(t) = \begin{cases} 1, \ если \dfrac{a+\mu}{E}\left[\dfrac{1}{(1+E)^t} + \dfrac{1}{(1+E)^N}\right] - \dfrac{1+\lambda(t-1)}{(1+E)^t} \geq 0 \\ 0, \ если \dfrac{a+\mu}{E}\left[\dfrac{1}{(1+E)^t} + \dfrac{1}{(1+E)^N}\right] - \dfrac{1+\lambda(t-1)}{(1+E)^t} < 0 \end{cases} \cdot \qquad (38)$$

Таким образом, оптимальной стратегией является инвестирование всех получаемых средств от проекта на интервале 0 до t^* в основные средства и оборотный капитал и полный отказ от инвестирования после шага прекращения инвестиций t^*.

Из равенства нулю условия

$$\frac{a+\mu}{E}\left[\frac{1}{(1+E)^t} + \frac{1}{(1+E)^N}\right] - \frac{1+\lambda(t-1)}{(1+E)^t} = 0$$

определим время прекращения инвестиций:

$$t^* = N + \log_{1+E}\left(1 - \frac{E}{a+\mu}[1+\lambda(t-1)]\right). \qquad (39)$$

Из экономического смысла следует, что выражение в скобках меньше 1, поэтому логарифм является отрицательным числом и время прекращения инвестиций находится в интервале от 0 до N. Анализируя формулу (39), можно сделать следующий вывод: время прекращения инвестиций зависит от горизонта планирования: чем больший период времени предполагается осуществлять инвестиционный проект, тем дольше необходимо инвестировать в основные средства. Время прекращения инвестиций также зависит от рентабельности производства a и ставки дисконтирования E.

Выведем из формулы (39) следующие условия осуществления инвестиций.

Выражение под логарифмом должно быть больше нуля:

$$1 - \frac{E}{a+\mu}[1+\lambda(t-1)] > 0.$$

Из данного условия следует, что для рентабельности производства должно выполняться следующее неравенство:

$$a > E[1+\lambda(t-1)] - \mu.$$

Время прекращения инвестиций должно быть больше нуля:

$$N + \log_{1+E}\left(1 - \frac{E}{a+\mu}[1+\lambda(t-1)]\right) \geq 0.$$

Из неравенства следует:

$$a > \frac{E(1+E)^N}{(1+E)^N - 1}[1+\lambda(t-1)] - \mu.$$

Полученные условия могут быть использованы как критерии для принятия решения об инвестировании средств в проект. Если при заданном горизонте планирования N и ставки дисконтирования E условия для рентабельности производства a не выполняются, то инвестиционный проект должен быть отклонен.

Поступила в редакцию 09.01.2009 г.